

CERC MATEMATICA -LICEE-GALAȚI 27.11.2021

PROBLEME DIN GAZETA MATEMATICĂ

PROBLEMA 1. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^{1 + \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln n}}$. G.M-B 2/2021

Soluție : Fie $a_n = 1 + \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln n}$, $x_n = \ln(\sqrt[n]{n})^{a_n} = \frac{a_n \ln n}{n} = \frac{a_n}{\frac{n}{\ln n}}$,

Pentru $n \geq 3$, șirul $b_n = \frac{n}{\ln n}$ este strict crescător și nemărginit.

Aplicând Lema Cesaro-Stolz șirurilor $(a_n), n \geq 3$ și $(b_n), n \geq 3$ obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{(n+1) \ln n - n \ln(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln n - \ln(1 + \frac{1}{n})^n} = 1,$$

Rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^{1 + \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln n}} = e$.

PROBLEMA 2. a) Să se arate că, dacă $q \in \mathbb{Q}$ și $\operatorname{tg} q\pi \in \mathbb{Q}$, atunci $\operatorname{tg} q\pi \in \{-1, 0, 1\}$.

b) Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\frac{\operatorname{arctg} n}{\operatorname{arcctg} n} \in \mathbb{Q}$. G.M-B 2/2021

Soluție: a) Fie $\operatorname{tg} q\pi = \frac{x}{y}$, $x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0, (x, y) = 1$ și $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $nq \in \mathbb{Z}$. Avem :

$$\left(\frac{y + ix}{y - ix}\right)^n = \left(\frac{1 + itg q\pi}{1 - itg q\pi}\right)^n = \left(\frac{\cos q\pi + i \sin q\pi}{\cos q\pi - i \sin q\pi}\right)^n = \cos(2nq\pi) + i \sin(2nq\pi) = 1,$$

Deci $(y + ix)^n = (y - ix)^n$. Notăm $z = y - ix$, rezultă că $z^n = (z + 2ix)^n$, adică

$$z^n = z^n + C_n^1 z^{n-1} (2ix) + \dots + C_n^{n-1} z (2ix)^{n-1} + (2ix)^n, \text{ de unde obținem}$$

$$z(C_n^1 z^{n-2} (2ix) + \dots + C_n^{n-1} (2ix)^{n-1}) = -(2ix)^n, \text{ relația devine } (y - ix)(a + ib) = -(2ix)^n$$

cu $a, b \in \mathbb{Z}$, trecând la module și ridicând la pătrat obținem $(x^2 + y^2)(a^2 + b^2) = 4^n x^{2n}$.

Dar $(x^2 + y^2, x^2) = 1$ obținem $x^2 + y^2/4^n$. Dar $(x, y) = 1$ și x, y nu pot fi ambele pare.

Deci $x^2 + y^2 \in \{1, 2\}$, deci $x = 0, y = \pm 1$ sau $|x| = |y| = 1$, obținem $\operatorname{tg} q\pi \in \{-1, 0, 1\}$.

b) Fie $\frac{\operatorname{arctg} n}{\operatorname{arcctg} n} = r \in \mathbb{Q}, r > 0$. Dar $\operatorname{arctg} n + \operatorname{arcctg} n = \frac{\pi}{2}$, obținem $\operatorname{arctg} n = \frac{r\pi}{2(r+1)} = q\pi$.

Deci $n = \operatorname{tg} \frac{r\pi}{2(r+1)} = \operatorname{tg} q\pi \in \{-1, 0, 1\}$, dar $\frac{r\pi}{2(r+1)} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ rezultă $n = \operatorname{tg} \frac{r\pi}{2(r+1)} = 1$.

PROBLEMA 3. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră şirul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^n + 2x + 2} dx$.

Demonstraţi că $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \frac{1}{5}$. (Bacalaureat mate-info 2017)

Soluţie 1: Avem $I_{n+1} + 2I_n + 2I_{n-1} = \frac{1}{n}$, pentru orice $n \geq 2$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x^n + 2x + 2} dx \leq 0, \text{ deci } I_{n+1} \leq I_n \text{ pentru orice } n \geq 1, \text{ de unde obţinem}$$

$$5I_{n+1} \leq I_{n+1} + 2I_n + 2I_{n-1} \leq 5I_{n-1} \Leftrightarrow 5I_{n+1} \leq \frac{1}{n} \leq 5I_{n-1} \Leftrightarrow \frac{n}{5(n+1)} \leq nI_n \leq \frac{n}{5(n-1)}$$

Trecând la limită obţinem $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \frac{1}{5}$.

Soluţie 2: Demonstrăm rezultatul mai general

$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1)$, unde $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, unde f derivabilă cu derivata continuă.

$$n \int_0^1 x^n f(x) dx = n \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} f(x) \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} f'(x) dx = \frac{n}{n+1} f(1) - \frac{n}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx \quad (1)$$

Dar funcţia f' este continuă deci mărginită, există $M > 0$ cu $|f'(x)| \leq M$, deci

$$\left| \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx \right| \leq M \frac{x^{n+2}}{n+2} \Big|_0^1 = \frac{M}{n+2} \quad (2) \text{ . Trecând la limită relaţia (2) obţinem}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx = 0. \text{ Trecând la limită relaţia (1) obţinem } \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1) \text{ .}$$

Soluţie 3: Demonstrăm rezultatul mai general

$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1)$, unde $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, f integrabilă şi continuă în punctul $x=1$

Aplicăm schimbarea de variabilă $x^n = t \Leftrightarrow x = t^{\frac{1}{n}}$ (funcţia nu e derivabilă în $t = 0$)

Considerăm $\varepsilon \in (0,1)$ şi aplicăm schimbarea de variabilă pe intervalul $[\varepsilon, 1]$, obţinând

$$n \int_{\varepsilon}^1 x^n f(x) dx = \int_{\varepsilon^n}^1 t^{\frac{1}{n}} f\left(t^{\frac{1}{n}}\right) dt \Rightarrow n \int_0^1 x^n f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon^n}^1 t^{\frac{1}{n}} f\left(t^{\frac{1}{n}}\right) dt = \int_0^1 t^{\frac{1}{n}} f\left(t^{\frac{1}{n}}\right) dt$$

Aplicăm teorema convergenţei dominate şirului de funcţii $g_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, g_n(x) = t^{\frac{1}{n}} f\left(t^{\frac{1}{n}}\right)$

cu limita $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t) = f(1)$, pentru $t \in (0,1]$ şi $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(0) = 0$.

Obţinem astfel $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = \int_0^1 f(1) dx = f(1)$.