Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică

Testul 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_3=7$ și $a_7=15$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-5$. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $f(x)\geq 2f(1)+4$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $81^x=3$.

5p **4.** Calculați $\dfrac{A_6^2}{P_3}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$, $B(0,-5)$ și $C(4,-1)$. Arătați că triunghiul ACB este dreptunghic isoscel.

5p **6**. Arătați că $\dfrac{\text{tg}60^\circ}{\text{ctg}30^\circ\cdot\cos 45^\circ}=\sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & -2\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=-1$.

5p **b)** Demonstrați că $A\cdot A=I_2$.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $AX-I_2=2021A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy-5x-5y+30$.

5p **a)** Arătați că $5\circ 2021=5$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele întregi m și n pentru care $m^2\circ n=16$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-8)e^x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=(x-2)(x+4)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f'(x)}{x-2}$.

5p **c)** Demonstrați că $x^2\geq 8-4e^{2-x}$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2 f(x)(x+1)\,dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx=1+\ln\frac{9}{16}$.

5p **c)** Determinați numărul real $a>1$ astfel încât $\displaystyle\int_1^a f(x)f'(x)\,dx=\frac{1}{8}$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică

Testul 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\left(7-7\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{7}\right)\cdot\frac{6}{41}=1$.
5p	**2.**Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-6$ cu graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=6-x$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7(3x-2)=1$.
5p	**4.** După o ieftinire cu 12%, o tabletă grafică costă 264 de lei. Determinați prețul inițial al tabletei.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,3)$ și $T(6,5)$. Determinați coordonatele punctului A, știind că A este mijlocul segmentului MT.
5p	**6.** Arătați că $\cos 60°\cdot\sin 60°+\sin 90°-\sin 30°\cdot\cos 30°=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A(a)=\begin{pmatrix}a+2 & 3a+2\\ a & 3a\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1))=4$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(4)=B\cdot B+2\cdot C$.
5p	**c)** Determinați numărul natural n pentru care $\det(A(n)+B)=4$.
	2. Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{3xy+1}{x+y}$.
5p	**a)** Arătați că $1*1=2$.
5p	**b)** Calculați $((1*2)*3)-(1*(2*3))$.
5p	**c)** Determinați numerele reale $x\in M$ pentru care $x*x=2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3}{5}x^5+\frac{3}{4}x^4-2x^3-1$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=3x^2(x-1)(x+2)$, pentru orice număr real x.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Arătați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $[-2,1]$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(x^2-1)+3$.
5p	**a)** Arătați că $\int_{-1}^{1}(f(x)+x-3)dx=0$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 \left(f(x)-x^3-3\right)e^x dx$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>0$, știind că $\int_0^1 f(x)dx=-a^2+5$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Testul 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{12}\left(\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)+\sqrt{8}\left(3\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+a$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a pentru care $f(a)=2$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $\sqrt{9-x}=x-3$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale pare de două cifre, acesta să fie multiplu de 5.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-6,1)$ și $B(-2,3)$. Determinați distanța de la punctul O la punctul M, unde M este mijlocul segmentului AB.

5p **6**. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $AB=12$ și ipotenuza $BC=20$. Calculați aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -4\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x & 3\\ x & 4\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=-1$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot B(x)=B(x)\cdot A$.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care $\det\left(aA+B(a)\right)=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x^2+xy+y^2$.

5p **a)** Arătați că $2*(-1)=3$.

5p **b)** Arătați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $n*n=48$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-x-5\ln x+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(x-1)(6x+5)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+5\ln x}{xf'(x)}=\dfrac{1}{2}$.

5p **c)** Demonstrați că $3x^2-x-2\geq\ln\left(x^5\right)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+2}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_{-1}^{2}(x+2)f(x)\,dx=6$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_{0}^{4}\left(f(x)-\frac{x^2}{x+2}\right)dx$.

5p **c)** Determinați numărul natural n, știind că $\displaystyle\int_{0}^{6}\left(x^2-9\right)f(x+1)\,dx=n^2$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Testul 4

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $2\cdot 8{,}5+10{,}5:3{,}5=20$.
5p	**2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(2,-2)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+a+1$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $10^{6-2x}=100^2$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $M=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$, numărul $\sqrt{10n}$ să fie rațional.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,2)$ și $B(3,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că dreptele OA și AB sunt perpendiculare.
5p	**6**. Se consideră triunghiul ABC cu $AB=12$, $BC=8$ și unghiul C de măsură egală cu $30°$. Calculați $\sin A$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-4 & -5\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Arătați că $\det B=-4$.
5p	**b)** Determinați numărul real a pentru care $A\cdot A-B\cdot B=a(A+B)$.
5p	**c)** Arătați că, pentru orice număr real x, matricea $C(x)=xA+2B$ este inversabilă.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=(2x-1)(2y-1)+\frac{1}{2}$.
5p	**a)** Arătați că $2*\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.
5p	**b)** Determinați numărul real x pentru care $(4x)*\frac{1}{4}=25$.
5p	**c)** Calculați $1*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\frac{1}{4}*\frac{1}{5}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{4}{x+3}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)^2}$, $x\in(-3,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $x^2+f(x)\geq 1$, pentru orice $x\in(-3,+\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(2x-1)(x+1)$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^5 \frac{f(x)}{x+1}dx=20$.
5p	**b)** Calculați $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}dx$.
5p	**c)** Determinați numărul real a, $a\in\left[\frac{1}{2},2\right)$, știind că $\int_a^2 f'(x)\sqrt{f(x)}dx=18$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Testul 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați termenul al cincilea al unei progresii geometrice $(b_n)_{n\ge1}$, în care $b_1=3$ și $b_2=-6$.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $2x^2-6x+1=0$. Arătați că $x_1+x_2-6x_1x_2=0$.

5p **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuația $2+\sqrt[3]{27x+8}=1$.

5p **4.** După o scumpire cu 15%, un produs costă 92 de lei. Determinaţi prețul produsului înainte de scumpire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,0)$ și $B(9,a)$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a pentru care distanța dintre punctele A și B este egală cu 13.

5p **6**. Se consideră triunghiul ABC cu $AB=AC=14$ și unghiul B de măsură egală cu $75°$. Determinați aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x&x-2\\1&2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=3$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1)=3(A(x)-I_2)$.

5p **c)** Arătați că $\det\left(xA(x)-A(x^2)\right)\ge0$, pentru orice număr real x.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=3xy-\dfrac{x+y}{3}+1$.

5p **a)** Arătați că $1*5=14$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $3*x=-52$.

5p **c)** Determinați numerele naturale n pentru care $n*(0*(3n))\ge\dfrac{2n}{3}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x^3-6x^2+18x-49$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=-6(x-1)(x+3)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Se consideră punctele $A(-2,f(-2))$ și $B(0,f(0))$. Arătați că tangentele la graficul funcției f în punctele A și B au pantele egale.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\ln x-2$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3(f(x)-\ln x)dx=0$.

5p **b)** Calculați $\int_1^e(f(x)-x+2)dx$.

5p **c)** Demonstrați că orice primitivă $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f este convexă.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Testul 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\frac{1}{\sqrt{5}-2}-\sqrt{5}=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+5x+2$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=a$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3\log_4(3x+1)=6$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr x din mulțimea $A=\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, numărul x^2 să fie număr impar.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(4,3)$ și $C(a,b)$, unde a și b sunt numere reale. Determinați numerele reale a, b, știind că punctul A este mijlocul segmentului BC.

5p **6**. Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AB=9$ și $AC=12$. Determinați lungimea înălțimii din A a triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=2$.

5p **b)** Arătați că $(A-2I_2)\cdot(A-4I_2)=6I_2$.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A\cdot X=3A+4X$.

2. Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=xy-\frac{12}{x+y}+\frac{3}{x}+\frac{3}{y}$.

5p **a)** Arătați că $1*3=4$.

5p **b)** Arătați că $x*x=x^2$, pentru orice $x\in M$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n pentru care $(n*n)*(n*n)=1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{x^2-2x+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{4(1-x)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{2x}{x^2+1}+1, & x\in(-\infty,0]\\ e^x, & x\in(0,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^4 f(x)\,dx=e\left(e^3-1\right)$.

5p **b)** Calculați $\int_1^2 xf(x)\,dx$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>0$, știind că $\int_{-a}^0 f(x)\,dx = a-\ln(a+1)$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Testul 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că media aritmetică a numerelor $a=2{,}4$ și $b=4-\frac{2}{5}$ este egală cu 3.

5p **2.** Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3x$ cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $2^{1-2x}=32$.

5p **4.** In urma unei ieftiniri cu 20%, prețul unui produs a scăzut cu 27 de lei. Determinați prețul produsului înainte de ieftinire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,4)$, $B(6,4)$ și $C(0,-4)$. Știind că punctul D este mijlocul segmentului AB, arătați că $BC=2OD$.

5p **6**. Se consideră numărul real $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos x=\frac{1}{5}$. Arătați că $\operatorname{tg}x=2\sqrt{6}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x-1 & x \\ 1 & -1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(4))=-7$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $\det\left(A(1)\cdot A(1)+2A(x)\right)=11$.

5p **c)** Determinați numerele reale x și y pentru care $A(0)\cdot A(x)\cdot A(1)=3A(y)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=20x-21y+1$.

5p **a)** Arătați că $1*2=-21$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $(x-1)*x=1$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $x^2*x\le 0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-2)e^x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=(x-1)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f'(x)}{e^x-e}$.

5p **c)** Arătați că $(2-x)e^{x-1}\le 1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^5+x^2-1$.

5p **a)** Arătați că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x^2\right)dx=-2$.

5p **b)** Arătați că $\int_{2}^{4}\frac{f(x)-2x^5}{2x}dx=\frac{6-\ln 2}{2}$.

5p **c)** Calculați $\int_{0}^{1}x^4\left(f(x)-x^2\right)^2 dx$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Testul 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\frac{2}{3}\cdot 0,3+3,2:4=1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=6-4x$. Determinați numărul real a, știind că punctul $A(a,2a)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-2x+16}=4$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{1,2,3,\ldots,9\}$, acesta să verifice inegalitatea $(n-2)(n-6)\geq 0$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-5,0)$, $B(-1,8)$. Arătați că triunghiul OAM este isoscel, știind că M este mijlocul segmentului AB.

5p **6**. Se consideră pătratul $ABCD$ astfel încât aria triunghiului ABC este egală cu 2. Calculați perimetrul pătratului $ABCD$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -6 & 4\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x & 2\\ -7 & x-4\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $\det(B(x))+\det(B(7)-A)=0$.

5p **c)** Determinați matricea $C\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $xA-A\cdot B(x)=14C$, pentru orice număr real x.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=6xy-6x-6y+7$.

5p **a)** Arătați că $1*3=1$.

5p **b)** Demonstrați că $e=\frac{7}{6}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați suma numerelor întregi m care verifică inegalitatea $\frac{m}{2}*\left(-\frac{m}{3}\right)\geq 1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+\frac{3}{x}+4$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{3(x^2-1)(x^2+1)}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Arătați că funcția f este convexă.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 (x+1)f(x)\,dx=4$.

5p **b)** Calculați $\int_1^3 \frac{f(x)}{x}\,dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\cdot f(-x)\,dx=4(1-\ln 3)$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Testul 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Determinați suma primilor patru termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_2=5$ și $a_3=8$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-8$. Determinați numerele reale a pentru care $a\cdot f(a)=f(1)$.
5p	**3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuația $\log_5(25-x)=\log_5(x+5)$.
5p	**4.** Determinați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu cifre din mulțimea $A=\{2,3,5,9\}$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $y=2x+a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a știind că punctul $A(2,3)$ aparține dreptei d.
5p	**6.** Arătați că $4\sin 60^\circ(\text{tg}60^\circ-\cos 30^\circ)=3$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -3\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B(a)=\begin{pmatrix}a & a\\ 3 & 6\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det A=-5$.
5p	**b)** Determinați numărul real a pentru care $B(1)\cdot B(-1)+3A=4B(a)$.
5p	**c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $X\cdot(A-2I_2)=B(0)$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(2x-y+1)(2y-x+1)$.
5p	**a)** Arătați că $3*4=18$.
5p	**b)** Demonstrați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.
5p	**c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $(2m)*n=13$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f:(-5,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+7}{x+5}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{3}{(x+5)^2}$, $x\in(-5,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y=3x+5$.
	2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2\sqrt{x}+2$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^3\left(f(x)+2\sqrt{x}\right)dx=8$.
5p	**b)** Arătați că funcția f este o primitivă a funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$.
5p	**c)** Calculați $\int_1^2\dfrac{1}{f(x^2)}dx$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Testul 10

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\left(3+\sqrt{5}\right)^2-\sqrt{5}\left(6+2\sqrt{5}\right)=4$.
5p	**2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x-1$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.
5p	**3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuația $2^{x+4}=4^{x+3}$.
5p	**4.** Un produs costă 360 de lei. Determinați prețul produsului după o scumpire cu 15%.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,3)$, $B(-1,-4)$ și $C(5,4)$. Arătați că triunghiul AMC este dreptunghic, unde M este mijlocul segmentului BC.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC, în care unghiurile A și B au măsurile egale cu $30°$, respectiv $45°$ și $BC=4$. Determinați lungimea laturii AC a triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}-1 & x\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det A=1$.
5p	**b)** Determinați numărul real x pentru care $B\cdot B=A$.
5p	**c)** Determinați numerele reale x pentru care $\det\left(B+\left(\det B\right)A\right)=0$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=x+y+16$.
5p	**a)** Arătați că $(-8)\circ 2=10$.
5p	**b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.
5p	**c)** Determinați numărul real x pentru care pentru care $x\circ\left(\frac{x}{2}+3\right)\circ x=2x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{x^2}+\ln x-2$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(x-2)(x+2)}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2f(x)}{x^3-1}=-1$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=-\frac{2}{3}$.
5p	**b)** Arătați că $\int_1^e\left(f(x)+1\right)\ln x\,dx=\frac{2e^3+1}{9}$.
5p	**c)** Determinați numărul real, a, $a\in(0,+\infty)$, pentru care $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(f(\sin x)+f(\cos x)\right)\operatorname{tg}x\,dx=\ln a$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Testul 11

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $(0,6+0,8):0,7-0,25\cdot 4=1$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-5$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)-f(2)=2f(4)$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(x^2-7\right)=2$.
5p	**4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un element n din mulțimea $A=\{1,2,3,\ldots 20\}$, numărul $2n$ să fie multiplu de 10.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-8,6)$ și $B(a,4)$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a pentru care $MA=OB$, unde M este mijlocul segmentului OA.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, cu $AB=12$ și $BC=13$. Determinați $\sin B$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}2x+1 & x\\ 1 & x+1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det A=9$.
5p	**b)** Arătați că $A+B(1)\cdot B(-1)=2B(0)$.
5p	**c)** Determinați numărul real x pentru care $B(1)+B(2)+B(3)+\ldots+B(9)=9B(x)$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=\dfrac{x+y}{2}-\dfrac{xy}{3}$.
5p	**a)** Arătați că $2\circ 6=0$.
5p	**b)** Determinați numărul real x pentru care $x\circ 6=6$.
5p	**c)** Determinați numerele întregi m pentru care $m\circ(3m)\geq 2m-3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^4}{2}-2x^3+3$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=2x^2(x-3)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{x^2e^x}$.
5p	**c)** Arătați că $f(x)\geq-\dfrac{21}{2}$, pentru orice număr real x.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^2 f(x)\,dx=6$.
5p	**b)** Calculați $\int_0^1\dfrac{1}{f(x)}\,dx$.
5p	**c)** Determinați $a\in(0,2)$ pentru care $\int_{-a}^{a}\dfrac{1}{x^2+2f(x)+2}\,dx=\dfrac{2}{3}$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Testul 12

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Arătați că $\left(\frac{2}{3}\right)^2 : \frac{1}{3} - 3:9 = 1$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-9$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-4x+8}=x$.
5p	**4.** După o ieftinire cu 8%, un produs costă 184 de lei. Determinați prețul produsului înainte de ieftinire.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,3)$, $B(4,1)$, C și D. Știind că punctele C și B sunt mijloacele segmentelor AB, respectiv CD, determinați coordonatele punctului D.
5p	**6.** Se consideră $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos x=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\cdot\sin x$. Arătați că $\sin x=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A=\begin{pmatrix}3&6\\1&2\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Arătați că $\det A=0$.
5p	**b)** Arătați că $A\cdot A=5A$.
5p	**c)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $\det\left(xA+(1-x)I_2\right)\geq 0$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=3xy-x^2-y^2$.
5p	**a)** Arătați că $1*2=1$.
5p	**b)** Determinați numerele reale x pentru care $2*x=1$.
5p	**c)** Determinați numerele reale x pentru care $\left(\sqrt[3]{x}*\sqrt[3]{x}\right)*\sqrt[3]{x^2}=1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-\frac{x}{x+2}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.
5p	**c)** Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+5}{x^2+1}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^3\left(x^2+1\right)f(x)\,dx=24$.
5p	**b)** Calculați $\int_0^1\left(f(x)-1\right)dx$.
5p	**c)** Arătați că orice primitivă F a funcției f este concavă pe $[0,+\infty)$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Varianta 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $2\cdot\left(2-\frac{3}{4}:\frac{1}{2}\right)=1$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-4$. Arătați că $f(1)+g(1)=0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{4-x}=4$.

5p **4.** Un produs costă 70 de lei. Determinați prețul produsului după o scumpire cu 30%.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,4)$, $B(-3,0)$ și $C(0,4)$. Calculați perimetrul triunghiului ABC.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, în care $AC=2$, $BC=4$ și unghiul A are măsura egală cu $30°$. Arătați că $\sin B=\frac{1}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=7$.

5p **b)** Arătați că $2B+I_2=3A$.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A\cdot X-B\cdot X=I_2-X$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=3-(x-3)(y-3)$.

5p **a)** Arătați că $1*3=3$.

5p **b)** Arătați că $e=2$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $x*(x+6)\geq 3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4}{x}+\ln x-5$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x-4}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Arătați că **nu** există asimptotă spre $+\infty$ la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+3x^2+3$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-e^x-3\right)dx=7$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 x\left(f(x)-3x^2\right)dx=\frac{5}{2}$.

5p **c)** Determinați $a\in(0,1)$, știind că $\int_0^a\frac{1}{f(x)-f'(x)}dx=\frac{1}{6}$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 4

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați termenul a_3 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$, știind că $a_1=4$ și rația este $r=5$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x-1$. Arătați că $f(0)=f(1)$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(3x+4)=\log_4 16$.
5p	**4.** După o scumpire cu 25%, un produs costă 350 de lei. Determinați prețul produsului înainte de scumpire.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,1)$ și $B(a,b)$, unde a și b sunt numere reale. Determinați numerele reale a și b, știind că punctul O este mijlocul segmentului AB.
5p	**6.** Se consideră triunghiul isoscel ABC, dreptunghic în A. Știind că aria triunghiului ABC este egală cu 8, determinați lungimea laturii AB.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x & -2x\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det A=3$.
5p	**b)** Arătați că $3B(2)+B(6)=4B(3)$.
5p	**c)** Determinați numărul real x pentru care $\big(B(-x)-B(x)\big)\cdot\big(B(-x)+B(x)\big)=A+B(3)$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=3x+4y-25$.
5p	**a)** Arătați că $3\circ 4=0$.
5p	**b)** Determinați numărul real x pentru care $(2x)\circ x=5$.
5p	**c)** Determinați numerele întregi m pentru care $m^2\circ 1\ge 1\circ m^2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x}{3x+1}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2}{(3x+1)^2}$, $x\in\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Arătați că funcția f este concavă.
	2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\ln x-1$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^4\big(f(x)-\ln x+1\big)\,dx=21$.
5p	**b)** Arătați că $\int_2^4\frac{x}{f(x)-\ln x}\,dx=\frac{1}{2}\ln 5$.
5p	**c)** Determinați $a\in(1,+\infty)$ pentru care $\int_1^a\frac{f(x)}{x^2}\,dx=\frac{a-\ln a}{a}$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $(1+3i)^2-6i=-8$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x-7$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3-x}=2x$.

5p **4.** Arătați că numărul de submulțimi cu două elemente ale mulțimii $A=\{1,2,3,4,5\}$ este egal cu numărul de submulțimi cu trei elemente ale mulțimii A.

5p **5**. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(-1,0)$ și $C(0,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că dreapta AB conține punctul C.

5p **6.** Se consideră numărul real $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos x+\sin\frac{\pi}{6}=1$. Calculați $\sin x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & -6\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ și $M(x)=A+xB$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Demonstrați că $M(x)\cdot M(1)=xM(1)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul natural n, știind că $M(4)\cdot M(3)\cdot M(2)\cdot M(1)=nM(1)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x+y+x^2y^2$.

5p **a)** Arătați că $1*2=7$.

5p **b)** Demonstrați că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați numerele întregi x pentru care $(-2)*x\le 3$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x^4-2x+2$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=e^x+4x^3-2$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este convexă.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\frac{1}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3\left(f(x)+\frac{1}{x}\right)dx=4$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)+\frac{1}{x}\right)\ln x\,dx=2\ln 2-\frac{3}{4}$.

5p **c)** Determinați cel mai mare număr natural nenul n pentru care $\int_1^{\sqrt{2}} x^{n+1}f^n(x)\,dx\ge\frac{1}{2021}$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_7 = a_3 + 4r$	**2p**
	$15 = 7 + 4r \Rightarrow r = 2$	**3p**
2.	$3x - 5 \geq 2 \cdot (-2) + 4$	**2p**
	$3x \geq 5 \Rightarrow x \in \left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$	**3p**
3.	$3^{4x} = 3$	**2p**
	$4x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$	**3p**
4.	$A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = 30$	**2p**
	$P_3 = 3!,\ P_3 = 6,\ \frac{A_6^2}{P_3} = 5$	**3p**
5.	$AB = \sqrt{(0-0)^2 + (-5-3)^2} = 8,\ AC = \sqrt{(4-0)^2 + (-1-3)^2} = 4\sqrt{2}$ și $BC = \sqrt{(4-0)^2 + (-1+5)^2} = 4\sqrt{2}$	**3p**
	Cum $AB^2 = AC^2 + BC^2$, triunghiul ACB dreptunghic și cum $AC = BC$, ΔACB este dreptunghic isoscel	**2p**
6.	$\frac{\text{tg}60^\circ}{\text{ctg}30^\circ \cdot \cos 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} =$	**3p**
	$= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - (-3) \cdot 1 =$	**3p**
	$= -4 + 3 = -1$	**2p**
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & 2-2 \\ -6+6 & -3+4 \end{pmatrix} =$	**3p**
	$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$	**2p**
c)	$AX - I_2 = 2021A \Leftrightarrow AX = I_2 + 2021A$. Matricea A este inversabilă și $A^{-1} = A$ de unde rezultă că $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot I_2 + 2021 \cdot A^{-1} \cdot A \Rightarrow X = A + 2021 \cdot I_2$	**3p**

	Deci $X=\begin{pmatrix}2023 & 1\\ -3 & 2019\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$5\circ 2021=5\cdot 2021-5\cdot 5-5\cdot 2021+30=$ $=-25+30=5$ 5	**3p** **2p**
b)	$x\circ y=xy-5x-5y+25+5=x(y-5)-5(y-5)+5=$ $=(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y	**3p** **2p**
c)	$m^2\circ n=16\Rightarrow\left(m^2-5\right)\left(n-5\right)=11$ și, deoarece, $n-5\in\mathbb{Z}$, $m^2-5\in\mathbb{Z}$ obținem $\begin{cases}m^2-5=11\\ n-5=1\end{cases}$ sau $\begin{cases}m^2-5=1\\ n-5=11\end{cases}$ sau $\begin{cases}m^2-5=-11\\ n-5=-1\end{cases}$ sau $\begin{cases}m^2-5=-1\\ n-5=-11\end{cases}$	**3p**
	Cum m și n sunt numere întregi, obținem soluțiile $\begin{cases}m=4\\ n=6\end{cases}$, $\begin{cases}m=-4\\ n=6\end{cases}$, $\begin{cases}m=2\\ n=-6\end{cases}$, $\begin{cases}m=-2\\ n=-6\end{cases}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2xe^x+\left(x^2-8\right)e^x=$ $=e^x\left(x^2+2x-8\right)=e^x\left(x-2\right)\left(x+4\right)$, pentru orice număr real x	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f'(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x(x-2)(x+4)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}e^x(x+4)=$ $=6e^2$	**3p** **2p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-8}{e^{-x}}=0$, $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-4]\Rightarrow$ f este crescătoare și $f(x)\ge 0$ pe $(-\infty,-4]$; $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in\left[-4,2\right]\Rightarrow$ f este descrescătoare și $f(x)\ge f(2)$ pe $\left[-4,2\right]$; $f'(x)\ge 0$ pentru orice $x\in[2,+\infty)\Rightarrow$ f este crescătoare și $f(x)\ge f(2)$ pe $[2,+\infty)$, $f(2)=-4e^2<0$	**3p**
	Obținem că $f(x)\ge -4e^2$ pentru orice număr real x $\Leftrightarrow$ $(x^2-8)e^x\ge -4e^2$, de unde rezultă $x^2\ge 8-4e^{2-x}$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int\limits_1^2 f\left(x\right)\left(x+1\right)dx=\int\limits_1^2\dfrac{x-1}{x+1}\left(x+1\right)dx=\int\limits_1^2\left(x-1\right)dx=$ $=\left.\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)\right\|_1^2=0+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$	**3p** **2p**
b)	$\int\limits_2^3 f\left(x\right)dx=\int\limits_2^3\dfrac{x-1}{x+1}dx=\int\limits_2^3\dfrac{x+1-2}{x+1}dx=\int\limits_2^3\left(1-\dfrac{2}{x+1}\right)dx=$ $=\left.\left(x-2\ln\|x+1\|\right)\right\|_2^3=1+\ln\dfrac{9}{16}$	**2p** **3p**
c)	$\int\limits_1^a f\left(x\right)f'\left(x\right)dx=\left.\dfrac{1}{2}\left(f(x)\right)^2\right\|_1^a=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^2$, unde $a>1$	**3p**
	$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^2=\dfrac{1}{8}\Rightarrow\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^2=\dfrac{1}{4}\Rightarrow\dfrac{a-1}{a+1}=\pm\dfrac{1}{2}$, obținem $a=3$, care convine	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(7-7\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{7}\right)\cdot\frac{6}{41}=\left(7-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{6}{41}=$	**3p**
	$=\frac{41}{6}\cdot\frac{6}{41}=1$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow 2x-6=6-x$	**3p**
	Coordonatele punctului de intersecție sunt $x=4$, $y=2$	**2p**
3.	$3x-2=7$	**3p**
	$x=3$, care convine	**2p**
4.	$p-\frac{12}{100}\cdot p=264$, unde p este prețul inițial al tabletei	**3p**
	$p=300$ de lei	**2p**
5.	$x_A=\frac{x_M+x_T}{2}=\frac{2+6}{2}=4$	**3p**
	$y_A=\frac{y_M+y_T}{2}=\frac{3+5}{2}=4$	**2p**
6.	$\sin 30°=\cos 60°=\frac{1}{2}$, $\sin 60°=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 90°=1$	**3p**
	$\cos 60°\sin 60°+\sin 90°-\sin 30°\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{4}+1-\frac{\sqrt{3}}{4}=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & 3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=3\cdot 3-1\cdot 5=9-5=4$	**3p**
b)	$B\cdot B+2C=\begin{pmatrix}4 & 12\\ 4 & 12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 14\\ 4 & 12\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}4+2 & 3\cdot 4+2\\ 4 & 3\cdot 4\end{pmatrix}=A(4)$	**2p**
c)	$A(n)+B=\begin{pmatrix}n+3 & 3n+5\\ n+1 & 3n+3\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(n)+B)=4n+4$, unde n este număr natural	**3p**
	$4n+4=4\Leftrightarrow n=0$, care convine	**2p**
2.a)	$1*1=\frac{3\cdot 1\cdot 1+1}{1+1}=$	**3p**
	$=\frac{4}{2}=2$	**2p**

b)	$1*2=\frac{7}{3}\Rightarrow(1*2)*3=\frac{7}{3}*3=\frac{33}{8}$	**2p**
	$2*3=\frac{19}{5}\Rightarrow 1*(2*3)=1*\frac{19}{5}=\frac{31}{12}$, de unde obținem $((1*2)*3)-(1*(2*3))=\frac{33}{8}-\frac{31}{12}=\frac{37}{24}$	**3p**
c)	$\frac{3x^2+1}{2x}=2\Leftrightarrow 3x^2-4x+1=0$	**3p**
	$x=1$ sau $x=\frac{1}{3}$, care convin	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^4+3x^3-6x^2=$	**3p**
	$=3x^2\left(x^2+x-2\right)=3x^2(x-1)(x+2)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=-1$, $f'(0)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=-1$	**3p**
c)	$x\in[-2,1]\Rightarrow x-1\le 0$ și $x+2\ge 0$	**2p**
	Cum $x^2\ge 0$, pentru orice număr real $x\Rightarrow f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[-2,1]$, deci f este descrescătoare pe $[-2,1]$	**3p**
2.a)	$\int_{-1}^{1}(f(x)+x-3)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^3-x+3+x-3\right)dx=\int_{-1}^{1}x^3dx=\frac{x^4}{4}\Big\|_{-1}^{1}=$	**3p**
	$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$	**2p**
b)	$\int_{0}^{1}\left(f(x)-x^3-3\right)e^x\,dx=-\int_{0}^{1}xe^xdx=-(x-1)e^x\Big\|_{0}^{1}=$	**3p**
	$=(-1)\cdot e^0=-1$	**2p**
c)	$\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}\left(x^3-x+3\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+3x\right)\Big\|_{0}^{1}=\frac{11}{4}$	**3p**
	$-a^2+5=\frac{11}{4}\Leftrightarrow a^2=\frac{9}{4}$ și, cum $a>0$, obținem $a=\frac{3}{2}$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{12}\left(\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)+\sqrt{8}\left(3\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=\sqrt{36}-3\sqrt{24}+3\sqrt{24}-\sqrt{16}=$	**3p**
	$=6-4=2$	**2p**
2.	$f(a)=a^2-2a+a$, deci $a^2-a-2=0$	**3p**
	$a=-1$ sau $a=2$	**2p**
3.	$9-x=x^2-6x+9$	**3p**
	$x=0$, care nu convine; $x=5$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale pare de două cifre are 45 de elemente, deci sunt 45 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale pare de două cifre, care sunt multipli de 5, sunt 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{9}{45}=\dfrac{1}{5}$	**1p**
5.	$M(-4,2)$	**3p**
	$OM=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$	**2p**
6.	Triunghiul ABC este dreptunghic, deci $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=16$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{AB\cdot AC}{2}=\dfrac{12\cdot 16}{2}=96$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & -4\end{vmatrix}=1\cdot(-4)-1\cdot(-3)=$	**3p**
	$=-4+3=-1$	**2p**
b)	$A\cdot B(x)=\begin{pmatrix}-2x & -9\\ -3x & -13\end{pmatrix}$, $B(x)\cdot A=\begin{pmatrix}x+3 & -3x-12\\ x+4 & -3x-16\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\begin{pmatrix}-2x & -9\\ -3x & -13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3 & -3x-12\\ x+4 & -3x-16\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=-1$	**2p**
c)	$aA+B(a)=\begin{pmatrix}2a & -3a+3\\ 2a & -4a+4\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(aA+B(a)\right)=-2a^2+2a$, unde a este număr real	**3p**
	$-2a^2+2a=0$, de unde obținem $a=0$ sau $a=1$	**2p**
2.a)	$2*(-1)=2^2+2\cdot(-1)+(-1)^2=$	**3p**
	$=4-2+1=3$	**2p**
b)	$x*y=x^2+xy+y^2=y^2+yx+x^2=$	**3p**
	$=y*x$, pentru orice numere reale x și y, deci legea de compoziție „$*$” este comutativă	**2p**

c)	$n^2+n^2+n^2=48 \Leftrightarrow n^2=16$	**3p**
	$n=-4$, care nu convine; $n=4$, care convine	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=6x-1-\frac{5}{x}=$	**3p**
	$=\frac{6x^2-x-5}{x}=\frac{(x-1)(6x+5)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)+5\ln x}{xf'(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-x+1}{(x-1)(6x+5)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(6+\frac{5}{x}\right)}=$	**3p**
	$=\frac{3}{1\cdot 6}=\frac{1}{2}$	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ și $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(0,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,1]$, $f'(x)\ge 0$ pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $x\in[1,+\infty)$	**3p**
	$f(x)\ge f(1)\Leftrightarrow f(x)\ge 3$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, de unde obținem $3x^2-x-2\ge 5\ln x$, deci $3x^2-x-2\ge\ln\left(x^5\right)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int\limits_{-1}^{2}(x+2)f(x)dx=\int\limits_{-1}^{2}\left(x^2+1\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\right\|_{-1}^{2}=$	**3p**
	$=\frac{14}{3}+\frac{4}{3}=6$	**2p**
b)	$\int\limits_{0}^{4}\left(f(x)-\frac{x^2}{x+2}\right)dx=\int\limits_{0}^{4}\frac{1}{x+2}dx=\left.\ln(x+2)\right\|_{0}^{4}=$	**3p**
	$=\ln 6-\ln 2=\ln 3$	**2p**
c)	$\int\limits_{0}^{6}(x-3)(x+3)\frac{x^2+2x+2}{x+3}dx=\int\limits_{0}^{6}\left(x^3-x^2-4x-6\right)dx=\left.\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-2x^2-6x\right)\right\|_{0}^{6}=144$	**3p**
	$n^2=144$ și, cum n este număr natural, obținem $n=12$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 4

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2\cdot 8{,}5+10{,}5:3{,}5=17+105:35=$	**2p**
	$=17+3=20$	**3p**
2.	$f(2)=-2\Rightarrow -6+a+1=-2$	**3p**
	$a=3$	**2p**
3.	$10^{6-2x}=10^4\Leftrightarrow 6-2x=4$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea $M=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$ are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**2p**
	Numerele $n\in M$ pentru care numărul $\sqrt{10n}$ este rațional sunt 10, 40 și 90, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$	**1p**
5.	$m_{OA}=-2$, $m_{AB}=\dfrac{a-2}{4}$	**2p**
	$m_{OA}\cdot m_{AB}=-1\Leftrightarrow -2\cdot\dfrac{a-2}{4}=-1$, de unde obținem $a=4$	**3p**
6.	$\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{BC}{\sin A}\Leftrightarrow\dfrac{12}{\frac{1}{2}}=\dfrac{8}{\sin A}$	**3p**
	$\sin A=\dfrac{8\cdot\frac{1}{2}}{12}=\dfrac{1}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det B=\begin{vmatrix}1 & 6\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-1\cdot 6=$	**3p**
	$=2-6=-4$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}16 & 15\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B\cdot B=\begin{pmatrix}7 & 18\\ 3 & 10\end{pmatrix}$, $A\cdot A-B\cdot B=\begin{pmatrix}9 & -3\\ -3 & -9\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=-3\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=-3(A+B)$, deci $a=-3$	**2p**
c)	$C(x)=\begin{pmatrix}-4x+2 & -5x+12\\ 2 & x+4\end{pmatrix}\Rightarrow \det(C(x))=-4x^2-4x-16$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\det(C(x))=-(2x+1)^2-15<0$, deci $\det(C(x))\neq 0$ adică matricea $C(x)$ este inversabilă pentru orice număr real x	**3p**

2.a)	$2*\frac{1}{2}=(2\cdot 2-1)\left(2\cdot\frac{1}{2}-1\right)+\frac{1}{2}=$	**3p**
	$=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$	**2p**
b)	$(4x)*\frac{1}{4}=\frac{2-8x}{2}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\frac{2-8x}{2}=25$, de unde obținem $x=-6$	**2p**
c)	$x*\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}*y=\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$\left(1*\frac{1}{2}\right)*\frac{1}{3}*\frac{1}{4}*\frac{1}{5}=\frac{1}{2}*\left(\frac{1}{3}*\frac{1}{4}*\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1+\frac{-4}{(x+3)^2}=$	**3p**
	$=\frac{(x+3)^2-4}{(x+3)^2}=\frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)^2}$, $x\in(-3,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x(x+3)}\right)=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x+3}=0$, deci dreapta de ecuație $y=x$ este asimptotă oblică la graficul funcției f	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(-3,-1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-3,-1]$, $f'(x)\geq 0$ pentru orice $x\in[-1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $x\in[-1,+\infty)$	**3p**
	$f(x)\geq f(-1)\Leftrightarrow f(x)\geq 1$, pentru orice $x\in(-3,+\infty)$ și, cum $x^2\geq 0$, obținem $x^2+f(x)\geq 1$, pentru orice $x\in(-3,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_1^5\frac{(2x-1)(x+1)}{x+1}dx=\int_1^5(2x-1)dx=\left(x^2-x\right)\Big\vert_1^5=$	**3p**
	$=20-0=20$	**2p**
b)	$\int_1^2\frac{2x^2+x-1}{x^2}dx=\int_1^2\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\left(2x+\ln x+\frac{1}{x}\right)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=\frac{3}{2}+\ln 2$	**2p**
c)	$\int_a^2 f'(x)\sqrt{f(x)}\,dx=\frac{2f(x)\sqrt{f(x)}}{3}\Big\vert_a^2=18-\frac{2f(a)\sqrt{f(a)}}{3}$	**3p**
	$f(a)=0$ și, cum a este număr real cu $a\in\left[\frac{1}{2},2\right)$, obținem $a=\frac{1}{2}$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	Rația progresiei geometrice este $q=-2$	**2p**
	$b_5=b_1q^4=3\cdot(-2)^4=48$	**3p**
2.	$x_1+x_2=3$, $x_1x_2=\frac{1}{2}$	**2p**
	$x_1+x_2-6x_1x_2=3-6\cdot\frac{1}{2}=3-3=0$	**3p**
3.	$\sqrt[3]{27x+8}=-1 \Leftrightarrow 27x+8=-1$	**3p**
	$x=-\frac{1}{3}$	**2p**
4.	$x+\frac{15}{100}\cdot x=92$, unde x este prețul produsului înainte de scumpire	**3p**
	$x=80$ de lei	**2p**
5.	$AB=\sqrt{144+a^2}$	**2p**
	$\sqrt{144+a^2}=13$, de unde obținem $a=-5$ sau $a=5$, care convin	**3p**
6.	Unghiul A are măsura egală cu $30°$, deci $\sin A=\frac{1}{2}$	**2p**
	$\mathcal{A}=\frac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2}=\frac{14\cdot 14\cdot\frac{1}{2}}{2}=49$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-(-1)\cdot 1=$	**3p**
	$=2+1=3$	**2p**
b)	$A(x)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}2x-2 & x-4\\ 3 & 3\end{pmatrix}$ și $3(A(x)-I_2)=\begin{pmatrix}3x-3 & 3x-6\\ 3 & 3\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\begin{pmatrix}2x-2 & x-4\\ 3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x-3 & 3x-6\\ 3 & 3\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=1$	**2p**
c)	$xA(x)-A(x^2)=\begin{pmatrix}x^2 & x^2-2x\\ x & 2x\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x^2 & x^2-2\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2x+2\\ x-1 & 2x-2\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\det(xA(x)-A(x^2))=0-(-2x+2)(x-1)=2(x-1)^2\geq 0$, pentru orice număr real x	**3p**
2.a)	$1*5=3\cdot 1\cdot 5-\frac{1+5}{3}+1=$	**3p**
	$=15-2+1=14$	**2p**

b)	$3*x=9x-\frac{3+x}{3}+1=\frac{26x}{3}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\frac{26x}{3}=-52$, de unde obținem $x=-6$	**2p**
c)	$0*(3n)=-n+1\Rightarrow n*(0*(3n))=n*(-n+1)=\frac{-9n^2+9n+2}{3}$, pentru orice număr natural n	**2p**
	$\frac{-9n^2+9n+2}{3}\geq\frac{2n}{3}\Leftrightarrow -9n^2+7n+2\geq 0$ și, cum n este număr natural, obținem $n=0$ sau $n=1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=-6x^2-12x+18=$	**3p**
	$=-6\left(x^2+2x-3\right)=-6(x-1)(x+3)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-3$ sau $x=1$	**2p**
	$x\in(-\infty,-3]\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(-\infty,-3]$, $x\in[-3,1]\Rightarrow f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $[-3,1]$, $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[1,+\infty)$	**3p**
c)	Panta tangentei la graficul funcției f în punctul $A(-2,f(-2))$ este $f'(-2)=-6\cdot(-3)\cdot 1=18$	**2p**
	Panta tangentei la graficul funcției f în punctul $B(0,f(0))$ este $f'(0)=-6\cdot(-1)\cdot 3=18$, deci tangentele la graficul funcției f în punctele A și B au pantele egale	**3p**
2.a)	$\int_1^3(f(x)-\ln x)dx=\int_1^3(x-2)dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\right\|_1^3=$	**3p**
	$=\frac{9}{2}-6-\left(\frac{1}{2}-2\right)=0$	**2p**
b)	$\int_1^e(f(x)-x+2)dx=\int_1^e\ln x dx=\left.(x\ln x-x)\right\|_1^e=$	**3p**
	$=0-(-1)=1$	**2p**
c)	F este primitivă a funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$F''(x)=f'(x)=1+\frac{1}{x}\geq 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este convexă	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1}{\sqrt{5}-2}-\sqrt{5}=\frac{\sqrt{5}+2}{\left(\sqrt{5}\right)^2-4}-\sqrt{5}=$	**3p**
	$=\sqrt{5}+2-\sqrt{5}=2$	**2p**
2.	$f(a)=2a^2+5a+2 \Rightarrow 2a^2+5a+2=a$	**2p**
	$2a^2+4a+2=0$, de unde obținem $a=-1$	**3p**
3.	$\log_4(3x+1)=2 \Rightarrow 3x+1=4^2 \Rightarrow 3x+1=16$	**3p**
	$x=5$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 6 elemente, deci sunt 6 cazuri posibile	**2p**
	Numerele $x\in A$ pentru care x^2 este număr impar sunt 5, 7 și 9, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$	**1p**
5.	Mijlocul segmentului BC are coordonatele $\frac{4+a}{2}$, respectiv $\frac{3+b}{2} \Rightarrow 2=\frac{4+a}{2}$, deci $a=0$	**3p**
	$-1=\frac{3+b}{2} \Rightarrow b=-5$	**2p**
6.	$BC=15$	**2p**
	$h=\frac{AB\cdot AC}{BC}=\frac{9\cdot 12}{15}=7{,}2$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=4\cdot 2-2\cdot 3=$	**3p**
	$=8-6=2$	**2p**
b)	$(A-2I_2)\cdot(A-4I_2)=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}=6I_2$	**3p**
c)	$A\cdot X=\begin{pmatrix}4a+2c & 4b+2d\\ 3a+2c & 3b+2d\end{pmatrix}$ și $3A+4X=\begin{pmatrix}12+4a & 6+4b\\ 9+4c & 6+4d\end{pmatrix}$, unde $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, cu a, b, c și d numere reale	**3p**
	$\begin{pmatrix}4a+2c & 4b+2d\\ 3a+2c & 3b+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12+4a & 6+4b\\ 9+4c & 6+4d\end{pmatrix}$, deci $a=7$, $b=4$, $c=6$ și $d=3$, de unde obținem $X=\begin{pmatrix}7 & 4\\ 6 & 3\end{pmatrix}$	**2p**

2.a)	$1*3=1\cdot 3-\frac{12}{1+3}+\frac{3}{1}+\frac{3}{3}=$ $=3-3+3+1=4$	**3p** **2p**
b)	$x*x=x\cdot x-\frac{12}{x+x}+\frac{3}{x}+\frac{3}{x}=$ $=x^2-\frac{6}{x}+\frac{3}{x}+\frac{3}{x}=x^2-\frac{6}{x}+\frac{6}{x}=x^2$, pentru orice $x\in M$	**2p** **3p**
c)	$n*n=n^2$, $(n*n)*(n*n)=n^2*n^2=n^4$, pentru orice număr natural nenul n $n^4=1$ și, cum n este număr natural nenul, obținem $n=1$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{0-2(2x-2)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}=\frac{4-4x}{\left(x^2-2x+2\right)^2}=$ $=\frac{4(1-x)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$f(2)=1$, $f'(2)=-1$ Ecuația tangentei este $y-f(2)=f'(2)(x-2)$, adică $y=-x+3$	**2p** **3p**
c)	$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$, pentru orice număr real a $f'(a)=0\Leftrightarrow\frac{4(1-a)}{\left(a^2-2a+2\right)^2}=0$, de unde obținem $a=1$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_1^4 f(x)dx=\int_1^4 e^x dx=e^x\Big\|_1^4=$ $=e^4-e=e\left(e^3-1\right)$	**3p** **2p**
b)	$\int_1^2 xf(x)dx=\int_1^2 xe^x dx=\int_1^2 x\left(e^x\right)' dx=\left(xe^x-e^x\right)\Big\|_1^2=$ $=e^2-0=e^2$	**3p** **2p**
c)	Cum a este număr real, $a>0$, obținem $\int_{-a}^0 f(x)dx=\int_{-a}^0\left(\frac{2x}{x^2+1}+1\right)dx=$ $=\int_{-a}^0\frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}dx+\int_{-a}^0 1dx=\ln\left(x^2+1\right)\Big\|_{-a}^0+x\Big\|_{-a}^0=-\ln\left(a^2+1\right)+a$ $a-\ln\left(a^2+1\right)=a-\ln(a+1)\Rightarrow a^2=a$ și, cum $a>0$, obținem $a=1$	**3p** **2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b=3{,}6$	**2p**
	$m_a=\dfrac{2{,}4+3{,}6}{2}=\dfrac{6}{2}=3$	**3p**
2.	$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+3x=0$	**2p**
	Abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox sunt $x=-3$ și $x=0$	**3p**
3.	$2^{1-2x}=2^5 \Leftrightarrow 1-2x=5$	**3p**
	$x=-2$	**2p**
4.	$\dfrac{20}{100}\cdot x=27$, unde x este prețul înainte de ieftinire	**3p**
	$x=135$ de lei	**2p**
5.	$O(0,0)$ este mijlocul segmentului AC	**2p**
	OD este linie mijlocie în triunghiul ABC, deci $OD=\dfrac{BC}{2}$, de unde obținem $BC=2OD$	**3p**
6.	$\sin^2 x+\left(\dfrac{1}{5}\right)^2=1 \Leftrightarrow \sin^2 x=\dfrac{24}{25}$ și, cum $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$	**3p**
	$\mathrm{tg}x=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}:\dfrac{1}{5}=2\sqrt{6}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(4)=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(4))=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & -1\end{vmatrix}=3\cdot(-1)-4\cdot 1=$	**3p**
	$=-3-4=-7$	**2p**
b)	$A(1)\cdot A(1)+2A(x)=\begin{pmatrix}2x-1 & -1+2x\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1)\cdot A(1)+2A(x))=1-2x$, pentru orice număr real x	**3p**
	$1-2x=11$, de unde obținem $x=-5$	**2p**
c)	$A(0)\cdot A(x)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}-x & 1\\ x+1 & -3\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\begin{pmatrix}-x & 1\\ x+1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3y-3 & 3y\\ 3 & -3\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=2$ și $y=\dfrac{1}{3}$	**3p**
2.a)	$1*2=20\cdot 1-21\cdot 2+1=$	**3p**
	$=20-42+1=-21$	**2p**
b)	$(x-1)*x=-x-19$, pentru orice număr real x	**2p**
	$-x-19=1$, de unde obținem $x=-20$	**3p**

c)	$x^2 * x = 20x^2 - 21x + 1$, pentru orice număr real x	**2p**
	$20x^2 - 21x + 1 \le 0$, de unde obținem $x \in \left[\frac{1}{20}, 1\right]$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = e^x + (x-2)e^x =$	**3p**
	$= (1 + x - 2)e^x = (x-1)e^x$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 1} \frac{f'(x)}{e^x - e} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)e^x}{e^x - e} =$	**2p**
	$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{xe^x}{e^x} = 1$	**3p**
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ și $f'(x) \le 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 1] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, 1]$, $f'(x) \ge 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $x \in [1, +\infty)$	**2p**
	$f(x) \ge f(1) \Leftrightarrow (x-2)e^x \ge -e$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, de unde obținem $(x-2)e^{x-1} \ge -1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci $(2-x)e^{x-1} \le 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	**3p**
2.a)	$\int\limits_{-1}^{1} \left(f(x) - x^2\right)dx = \int\limits_{-1}^{1} \left(2x^5 - 1\right)dx = \left.\left(\frac{x^6}{3} - x\right)\right\|_{-1}^{1} =$	**3p**
	$= -\frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -2$	**2p**
b)	$\int\limits_{2}^{4} \frac{f(x) - 2x^5}{2x} dx = \int\limits_{2}^{4} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)dx = \left.\left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x\right)\right\|_{2}^{4} =$	**3p**
	$= 4 - \frac{1}{2}\ln 4 - 1 + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{6 - \ln 2}{2}$	**2p**
c)	$\int\limits_{0}^{1} x^4 \left(2x^5 - 1\right)^2 dx = \frac{1}{10}\int\limits_{0}^{1} \left(2x^5 - 1\right)' \left(2x^5 - 1\right)^2 dx = \frac{1}{10} \cdot \left.\frac{\left(2x^5 - 1\right)^3}{3}\right\|_{0}^{1} =$	**3p**
	$= \frac{1}{10}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{15}$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{2}{3}\cdot 0,3+3,2:4=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{10}+\frac{32}{10}\cdot\frac{1}{4}=$	**3p**
	$=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}=1$	**2p**
2.	$f(a)=2a \Leftrightarrow 6-4a=2a$	**3p**
	$a=1$	**2p**
3.	$x^2-2x+16=16 \Rightarrow x^2-2x=0$	**2p**
	$x=0$ sau $x=2$, care convin	**3p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**2p**
	Numerele n din mulțimea A pentru care $(n-2)(n-6)\geq 0$ sunt 1, 2, 6, 7, 8 și 9, deci sunt 6 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$	**1p**
5.	$M(-3,4)$	**2p**
	$OA=5$, $OM=5$, deci triunghiul OAM este isoscel	**3p**
6.	Triunghiul ABC este dreptunghic în B, deci $\frac{AB\cdot BC}{2}=2$, și, cum $AB=BC$, obținem $AB=2$	**3p**
	$P_{ABCD}=4AB=8$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -6 & 4\end{vmatrix}=-3\cdot 4-2\cdot(-6)=$	**3p**
	$=-12+12=0$	**2p**
b)	$\det(B(x))=x^2-4x+14$, pentru orice număr real x	**2p**
	Cum $\det(B(7)-A)=\begin{vmatrix}10 & 0\\ -1 & -1\end{vmatrix}=-10$, obținem $x^2-4x+4=0$, deci $x=2$	**3p**
c)	$xA=\begin{pmatrix}-3x & 2x\\ -6x & 4x\end{pmatrix}$, $A\cdot B(x)=\begin{pmatrix}-3x-14 & 2x-14\\ -6x-28 & 4x-28\end{pmatrix} \Rightarrow xA-A\cdot B(x)=\begin{pmatrix}14 & 14\\ 28 & 28\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\begin{pmatrix}14 & 14\\ 28 & 28\end{pmatrix}=14C$, de unde obținem $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$1*3=6\cdot 1\cdot 3-6\cdot 1-6\cdot 3+7=$	**3p**
	$=18-6-18+7=1$	**2p**

b)	$x*\frac{7}{6}=6x\cdot\frac{7}{6}-6x-6\cdot\frac{7}{6}+7=7x-6x-7+7=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\frac{7}{6}*x=6\cdot\frac{7}{6}\cdot x-6\cdot\frac{7}{6}-6x+7=7x-7-6x+7=x$, pentru orice număr real x, deci $e=\frac{7}{6}$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	**3p**
c)	$\frac{m}{2}*\left(-\frac{m}{3}\right)=-m^2-m+7$, pentru orice număr întreg m	**2p**
	$-m^2-m+7\geq 1\Leftrightarrow m^2+m-6\leq 0$, de unde obținem $m\in[-3,2]$, deci suma numerelor întregi care verifică inegalitatea este egală cu $-3+(-2)+(-1)+0+1+2=-3$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2-\frac{3}{x^2}+0=$	**3p**
	$=\frac{3(x^4-1)}{x^2}=\frac{3(x^2-1)(x^2+1)}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$	**2p**
	$f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(0,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,1]$, $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $x\in[1,+\infty)$	**3p**
c)	$f''(x)=6x+\frac{6}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$f''(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția f este convexă	**3p**
2.a)	$\int_0^2 (x+1)f(x)dx=\int_0^2 2xdx=x^2\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=4-0=4$	**2p**
b)	$\int_1^3 \frac{2}{x+1}dx=2\int_1^3\frac{(x+1)'}{x+1}dx=2\ln(x+1)\Big\vert_1^3=$	**3p**
	$=2\ln 4-2\ln 2=2\ln 2$	**2p**
c)	$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\cdot f(-x)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{4x^2}{x^2-1}dx=4\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x^2-1+1}{x^2-1}dx=4\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)dx=4\left(x+\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}\right)\Big\vert_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=$	**3p**
	$=4\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 3\right)=4(1-\ln 3)$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r=3 \Rightarrow a_1=2$, $a_4=11$	**3p**
	$a_1+a_2+a_3+a_4=2+5+8+11=26$	**2p**
2.	$f(a)=3a-8$, $f(1)=-5$	**2p**
	$a(3a-8)=-5 \Leftrightarrow 3a^2-8a+5=0$, de unde obținem $a=1$ sau $a=\frac{5}{3}$	**3p**
3.	$25-x=x+5$	**2p**
	$x=10$, care convine	**3p**
4.	Cifra unităților poate fi aleasă în 4 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor poate fi aleasă în câte 3 moduri, deci se pot forma $4\cdot 3=12$ numere	**3p**
5.	$3=2\cdot 2+a$	**3p**
	$a=-1$	**2p**
6.	$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}$, $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**
	$4\sin 60^\circ(\operatorname{tg}60^\circ-\cos 30^\circ)=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & -3\end{vmatrix}=2\cdot(-3)-1\cdot(-1)=$	**3p**
	$=-6+1=-5$	**2p**
b)	$B(1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 6\end{pmatrix}$, $B(-1)=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 3 & 6\end{pmatrix} \Rightarrow B(1)B(-1)+3A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 15 & 33\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 3\\ -3 & -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 8\\ 12 & 24\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}8 & 8\\ 12 & 24\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}a & a\\ 3 & 6\end{pmatrix}$, de unde obținem $a=2$	**2p**
c)	$A-2I_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -5\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A-2I_2)=1$, deci matricea $A-2I_2$ este inversabilă și $(A-2I_2)^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=B(0)\cdot(A-2I_2)^{-1}$, de unde obținem $X=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -9 & -3\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$3*4=(2\cdot 3-4+1)(2\cdot 4-3+1)=$	**3p**
	$=3\cdot 6=18$	**2p**
b)	$x*y=(2x-y+1)(2y-x+1)=(2y-x+1)(2x-y+1)=$	**2p**

	$=y*x$, pentru orice numere reale x și y, deci legea de compoziție „$*$” este comutativă	3p
c)	$(2m)*n=(4m-n+1)(2n-2m+1)$, pentru orice numere naturale m și n	2p
	$(4m-n+1)(2n-2m+1)=13$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem perechile $(2,8)$ sau $(4,4)$	3p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{2(x+5)-(2x+7)}{(x+5)^2}=$	3p
	$=\frac{2x+10-2x-7}{(x+5)^2}=\frac{3}{(x+5)^2}$, $x\in(-5,+\infty)$	2p
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+7}{x+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+\frac{7}{x}\right)}{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}=$	2p
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{7}{x}}{1+\frac{5}{x}}=2$, deci dreapta de ecuație $y=2$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	3p
c)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a,f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=3x+5 \Leftrightarrow f'(a)=3$, $a\in(-5,+\infty)$	2p
	$\frac{3}{(a+5)^2}=3$ și, cum $a\in(-5,+\infty)$, obținem $a=-4$	3p
2.a)	$\int_1^3\left(f(x)+2\sqrt{x}\right)dx=\int_1^3(x+2)dx=\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big\|_1^3=$	3p
	$=\frac{21}{2}-\frac{5}{2}=8$	2p
b)	$f'(x)=\left(x-2\sqrt{x}+2\right)'=1-2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+0=$	3p
	$=1-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}=g(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția f este o primitivă a funcției g	2p
c)	$\int_1^2\frac{1}{f(x^2)}dx=\int_1^2\frac{1}{x^2-2x+2}dx=\int_1^2\frac{(x-1)'}{(x-1)^2+1}dx=\operatorname{arctg}(x-1)\Big\|_1^2=$	3p
	$=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4}$	2p

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 10

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(3+\sqrt{5}\right)^2-\sqrt{5}\left(6+2\sqrt{5}\right)=9+6\sqrt{5}+5-6\sqrt{5}-10=$	**3p**
	$=14-10=4$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow 5x+1=3x-1\Leftrightarrow 2x=-2$	**3p**
	Abscisa punctului de intersecție este $x=-1$	**2p**
3.	$2^{x+4}=2^{2(x+3)}\Leftrightarrow x+4=2x+6$	**3p**
	$x=-2$	**2p**
4.	$360+\frac{15}{100}\cdot 360=$	**2p**
	$=360+54=414$ lei	**3p**
5.	$M(2,0)$	**2p**
	$m_{AM}=-\frac{3}{4}$, $m_{MC}=\frac{4}{3}$, de unde obținem $m_{AM}\cdot m_{MC}=-1$, deci triunghiul AMC este dreptunghic	**3p**
6.	$\sin 30°=\frac{1}{2}$, $\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**
	$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}\Leftrightarrow\frac{4}{\frac{1}{2}}=\frac{AC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Leftrightarrow AC=4\sqrt{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{vmatrix}=3\cdot 3-(-4)\cdot(-2)=$	**3p**
	$=9-8=1$	**2p**
b)	$B\cdot B=\begin{pmatrix}1+x & -2x\\ -2 & x+1\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\begin{pmatrix}1+x & -2x\\ -2 & x+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=2$	**2p**
c)	$\det B=1-x\Rightarrow\det\left(B+(\det B)A\right)=\begin{vmatrix}-3x+2 & 5x-4\\ 2x-1 & -3x+2\end{vmatrix}=-x^2+x$, pentru orice număr real x	**3p**
	$-x^2+x=0$, de unde obținem $x=0$ sau $x=1$	**2p**
2.a)	$(-8)\circ 2=-8+2+16=$	**3p**
	$=-6+16=10$	**2p**
b)	$x\circ e=x$, pentru orice număr real x, de unde obținem $e=-16$	**2p**
	$-16\circ x=-16+x+16=x$, pentru orice număr real x, deci $e=-16$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**3p**

c)	$x\circ\left(\frac{x}{2}+3\right)=\frac{3x}{2}+19\Rightarrow x\circ\left(\frac{x}{2}+3\right)\circ x=\frac{5x}{2}+35$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\frac{5x}{2}+35=2x$, de unde obținem $x=-70$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=-\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x}-0=$	**3p**
	$=\frac{x^2-4}{x^3}=\frac{(x-2)(x+2)}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f(1)=0$, $f'(1)=-3$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=-3x+3$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2f(x)}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{2+x^2\ln x-2x^2}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\left(2+x^2\ln x-2x^2\right)'}{\left(x^3-1\right)'}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to1}\frac{0+2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}-4x}{3x^2-0}=\lim\limits_{x\to1}\frac{2x\ln x-3x}{3x^2}=-1$	**3p**
2.a)	$\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1\left(x^2-1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$	**2p**
b)	$\int\limits_1^e\left(f(x)+1\right)\ln x dx=\int\limits_1^e x^2\ln x dx=\int\limits_1^e\left(\frac{x^3}{3}\right)'\ln x dx=\left(\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}\right)\Big\|_1^e=$	**3p**
	$=\frac{e^3}{3}-\frac{e^3}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2e^3+1}{9}$	**2p**
c)	$f(\sin x)+f(\cos x)=\sin^2x-1+\cos^2x-1=\sin^2x+\cos^2x-2=-1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\left(f(\sin x)+f(\cos x)\right)\mathrm{tg}\,x dx=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{tg}x dx=\ln(\cos x)\Big\|_0^{\frac{\pi}{3}}=\ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)-\ln(\cos 0)=\ln\frac{1}{2}$	**3p**
	$\ln\frac{1}{2}=\ln a$, de unde obținem $a=\frac{1}{2}$, care convine	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 11

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(0,6+0,8):0,7-0,25\cdot 4=1,4:0,7-1=$	**3p**
	$=2-1=1$	**2p**
2.	$f(2)=-1$, $f(4)=3$ și $f(a)=2a-5$, unde a este număr real	**3p**
	$2a-5-(-1)=2\cdot 3\Leftrightarrow 2a-4=6$, de unde obținem $a=5$	**2p**
3.	$x^2-7=3^2\Rightarrow x^2-16=0$	**3p**
	$x=-4$ sau $x=4$, care convin	**2p**
4.	Mulțimea A are 20 de elemente, deci sunt 20 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele n din mulțimea A pentru care numărul $2n$ este multiplu de 10 sunt 5, 10, 15 și 20, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{4}{20}=\dfrac{1}{5}$	**1p**
5.	$OA=10\Rightarrow MA=5$, $OB=\sqrt{a^2+16}$, unde a este număr real	**3p**
	$\sqrt{a^2+16}=5\Leftrightarrow a^2-9=0$, de unde obținem $a=-3$ sau $a=3$	**2p**
6.	$AC=5$	**2p**
	$\sin B=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{5}{13}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}4 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=4\cdot 3-3\cdot 1=$	**3p**
	$=12-3=9$	**2p**
b)	$B(1)=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B(-1)=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow B(1)\cdot B(-1)=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$	**3p**
	$A+B(1)\cdot B(-1)=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=2B(0)$	**2p**
c)	$B(1)+B(2)+B(3)+\ldots+B(9)=\begin{pmatrix}3+5+7+\ldots+19 & 1+2+3+\ldots+9\\ 9 & 2+3+4+\ldots+10\end{pmatrix}=9\begin{pmatrix}11 & 5\\ 1 & 6\end{pmatrix}$	**3p**
	$9\begin{pmatrix}11 & 5\\ 1 & 6\end{pmatrix}=9\begin{pmatrix}2x+1 & x\\ 11 & x+1\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=5$	**2p**
2.a)	$2\circ 6=\dfrac{2+6}{2}-\dfrac{2\cdot 6}{3}=$	**3p**
	$=4-4=0$	**2p**

b)	$x \circ 6 = \frac{6-3x}{2}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\frac{6-3x}{2} = 6$, de unde obținem $x = -2$	**3p**
c)	$m \circ (3m) = -m^2 + 2m$, pentru orice număr întreg m	**2p**
	$-m^2 + 2m \geq 2m - 3 \Leftrightarrow -m^2 + 3 \geq 0$ și, cum m este număr întreg, obținem $m = -1$ sau $m = 0$ sau $m = 1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{4x^3}{2} - 6x^2 + 0 =$	**3p**
	$= 2x^3 - 6x^2 == 2x^2(x-3)$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{x^2 e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2(x-3)}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(2(x-3))'}{(e^x)'} =$	**3p**
	$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$	**2p**
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ sau $x = 3$ și $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 3] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, 3]$, $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [3, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[3, +\infty)$	**3p**
	$f(x) \geq f(3)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și, cum $f(3) = -\frac{21}{2}$, rezultă că $f(x) \geq -\frac{21}{2}$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (2x+1)\,dx = \left.(x^2 + x)\right\|_0^2 =$	**3p**
	$= (4+2) - (0-0) = 6$	**2p**
b)	$\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(2x+1)'}{2x+1}\,dx = \left.\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right\|_0^1 =$	**3p**
	$= \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{1}{2}\ln 3$	**2p**
c)	$\int_{-a}^{a} \frac{1}{x^2 + 2f(x) + 2}\,dx = \int_{-a}^{a} \frac{1}{(x+2)^2}\,dx = \left.-\frac{1}{x+2}\right\|_{-a}^{a} = \frac{2a}{4-a^2}$, pentru orice $a \in (0,2)$	**3p**
	$\frac{2a}{4-a^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow a^2 + 3a - 4 = 0$ și, cum $a \in (0,2)$, obținem $a = 1$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 12

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\frac{2}{3}\right)^2:\frac{1}{3}-3:9=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{1}-3\cdot\frac{1}{9}=$	**3p**
	$=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=1$	**2p**
2.	$f(x)=0\Leftrightarrow 3x-9=0$	**3p**
	$x=3$	**2p**
3.	$\sqrt{x^2-4x+8}=x\Rightarrow x^2-4x+8=x^2$	**2p**
	$-4x+8=0$, de unde obținem $x=2$, care convine	**3p**
4.	$x-\frac{8}{100}\cdot x=184$	**3p**
	$x=200$ de lei	**2p**
5.	$C(1,2)$	**2p**
	$4=\frac{1+x_D}{2}$, $1=\frac{2+y_D}{2}$, unde (x_D,y_D) sunt coordonatele punctului D, deci $x_D=7$ și $y_D=0$	**3p**
6.	$\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}\Rightarrow \cos x=\sqrt{3}\sin x$	**2p**
	$\sin^2 x+\left(\sqrt{3}\sin x\right)^2=1\Leftrightarrow \sin^2 x=\frac{1}{4}$ și, cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\frac{1}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3&6\\1&2\end{vmatrix}=3\cdot2-6\cdot1=$	**3p**
	$=6-6=0$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}3&6\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&6\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9+6&18+12\\3+2&6+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&30\\5&10\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=5\begin{pmatrix}3&6\\1&2\end{pmatrix}=5A$	**2p**
c)	$xA+(1-x)I_2=\begin{pmatrix}2x+1&6x\\x&x+1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(xA+(1-x)I_2\right)=-4x^2+3x+1$, pentru orice număr real x	**3p**
	$-4x^2+3x+1\ge0$, de unde obținem $x\in\left[-\frac{1}{4},1\right]$	**2p**
2.a)	$1*2=3\cdot1\cdot2-1^2-2^2=$	**3p**
	$=6-1-4=1$	**2p**

b)	$2*x=6x-4-x^2$, pentru orice număr real x	**2p**
	$6x-4-x^2=1\Leftrightarrow x^2-6x+5=0$, de unde obținem $x=1$ sau $x=5$	**3p**
c)	$\sqrt[3]{x}*\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x^2}\Rightarrow\left(\sqrt[3]{x}*\sqrt[3]{x}\right)*\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x^4}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\sqrt[3]{x^4}=1\Leftrightarrow x^4=1$, de unde obținem $x=-1$ sau $x=1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2-\frac{x+2-x}{(x+2)^2}=\frac{2x^2+8x+6}{(x+2)^2}=$	**3p**
	$=\frac{2\left(x^2+4x+3\right)}{(x+2)^2}=\frac{2(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$	**2p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$	**2p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-2,-1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-2,-1]$, $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1,+\infty)$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x+2}\right)=2$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{x+2}\right)=-1$, deci dreapta de ecuație $y=2x-1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
2.a)	$\int\limits_0^3\left(x^2+1\right)f(x)dx=\int\limits_0^3\left(x^2+5\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+5x\right)\Big\|_0^3=$	**3p**
	$=9+15=24$	**2p**
b)	$\int\limits_0^1\left(f(x)-1\right)dx=\int\limits_0^1\frac{4}{x^2+1}dx=4\operatorname{arctg}x\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=4\operatorname{arctg}1-4\operatorname{arctg}0=\pi$	**2p**
c)	F este primitivă a funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F''(x)=f'(x)=\frac{-8x}{\left(x^2+1\right)^2}\le 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, deci F este concavă pe $[0,+\infty)$	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(0,25\cdot 10-\frac{1}{2}\right)\left(0,25\cdot 10+\frac{1}{2}\right)=(2,5-0,5)(2,5+0,5)=$	**2p**
	$=2\cdot 3=6$	**3p**
2.	$f(2)=1\Rightarrow 4-2a+1=1$	**3p**
	$a=2$	**2p**
3.	$3^x\left(3^2+1\right)=30\Leftrightarrow 3^x=3$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	$\frac{20}{100}\cdot 500=100$ de lei	**3p**
	Prețul după scumpire este $500+100=600$ de lei	**2p**
5.	Mijlocul segmentului AB este punctul $M(4,3)$	**2p**
	$OM=\sqrt{(4-0)^2+(3-0)^2}=5$	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=$	**2p**
	$=\frac{5\cdot 10}{2}=25$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-1\cdot 3=$	**3p**
	$=2-3=-1$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}4 & 9\\ 3 & 7\end{pmatrix}$	**3p**
	$A\cdot A-3A=\begin{pmatrix}4 & 9\\ 3 & 7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 9\\ 3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$	**2p**
c)	$A\cdot X=\begin{pmatrix}1+3y & x+3\\ 1+2y & x+2\end{pmatrix}$, $X\cdot A=\begin{pmatrix}1+x & 3+2x\\ y+1 & 3y+2\end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale	**2p**
	$\begin{pmatrix}1+3y & x+3\\ 1+2y & x+2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1+x & 3+2x\\ y+1 & 3y+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3y-x & -x\\ y & x-3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=-1$ și $y=-1$	**3p**
2.a)	$3\circ 2=4\cdot 3\cdot 2+3+2=$	**3p**
	$=24+5=29$	**2p**

b)	$x \circ y = \frac{16xy + 4x + 4y}{4} = \frac{16xy + 4x + 4y + 1 - 1}{4} =$	**3p**
	$= \frac{4x(4y+1) + (4y+1) - 1}{4} = \frac{(4x+1)(4y+1) - 1}{4}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$x \circ x = \frac{(4x+1)^2 - 1}{4}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\frac{(4x+1)^2 - 1}{4} \le 2 \Leftrightarrow (4x+1)^2 \le 9 \Leftrightarrow -3 \le 4x+1 \le 3$, de unde obținem $x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = e^x + \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} =$	**3p**
	$= e^x + \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2+1)^2} = e^x + \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^x + \frac{x}{x^2+1} \right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^x + \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \right) = 0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptota orizontală spre $-\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
c)	$x \in [-1,1] \Rightarrow 1 - x^2 \ge 0 \Rightarrow f'(x) \ge 0 \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1,1] \Rightarrow f(-1) \le f(x) \le f(1)$, pentru orice $x \in [-1,1]$	**3p**
	Cum $f(-1) = \frac{2-e}{2e}$ și $f(1) = \frac{2e+1}{2}$, obținem $\frac{2-e}{2e} \le f(x) \le \frac{2e+1}{2}$, pentru orice $x \in [-1,1]$	**2p**
2.a)	$\int_1^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\, dx = \int_1^2 (x+1)\, dx = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big\vert_1^2 =$	**3p**
	$= (2+2) - \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{5}{2}$	**2p**
b)	$V = \pi \int_0^1 g^2(x)\, dx = \pi \int_0^1 x(x+1)^2\, dx = \pi \int_0^1 (x^3 + 2x^2 + x)\, dx = \pi \left(\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big\vert_0^1 =$	**3p**
	$= \pi \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{17\pi}{12}$	**2p**
c)	$\int_1^e \frac{f(x)\sqrt{x} \ln x}{x+1}\, dx = \int_1^e x \ln x\, dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x\, dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big\vert_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \int_1^e x\, dx =$	**3p**
	$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big\vert_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$, deci $a = 1$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(1+3i)^2-6i=1+6i+9i^2-6i=$	**3p**
	$=1-9=-8$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x+1=3x-7$	**3p**
	Coordonatele punctului de intersecție sunt $x=4$ și $y=5$	**2p**
3.	$3-x=4x^2\Rightarrow 4x^2+x-3=0$	**3p**
	$x=-1$, care nu convine; $x=\frac{3}{4}$, care convine	**2p**
4.	Numărul de submulțimi cu două elemente ale mulțimii A este egal cu $C_5^2=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=10$	**2p**
	Numărul de submulțimi cu trei elemente ale mulțimii A este egal cu $C_5^3=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10$, deci numărul de submulțimi cu două elemente ale mulțimii A este egal cu numărul de submulțimi cu trei elemente ale mulțimii A	**3p**
5.	$m_{AB}=1$, $m_{AC}=-a+2$, unde a este număr real	**2p**
	$m_{AB}=m_{AC}$, de unde obținem $a=1$	**3p**
6.	$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, deci $\cos x+\frac{1}{2}=1\Rightarrow\cos x=\frac{1}{2}$	**2p**
	$\sin^2 x+\frac{1}{4}=1\Leftrightarrow\sin^2 x=\frac{3}{4}$ și, cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem că $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{vmatrix}=2\cdot(-2)-4\cdot(-1)=$	**3p**
	$=-4+4=0$	**2p**
b)	$M(1)=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $M(x)=\begin{pmatrix}2-2x & 4-6x\\ -1+x & -2+3x\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$M(x)\cdot M(1)=\begin{pmatrix}0 & -2x\\ 0 & x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}0 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=xM(1)$, pentru orice număr real x	**3p**
c)	$M(4)\cdot M(3)\cdot\big(M(2)\cdot M(1)\big)=M(4)\cdot M(3)\cdot\big(2M(1)\big)=2M(4)\cdot\big(M(3)\cdot M(1)\big)=2\cdot 3\cdot 4M(1)$	**3p**
	Cum $2\cdot 3\cdot 4M(1)=nM(1)$, obținem $n=24$	**2p**
2.a)	$1*2=1+2+1^2\cdot 2^2=$	**3p**
	$=1+2+4=7$	**2p**

b)	$x*0=x+0+0=x$, pentru orice număr real x $0*x=0+x+0=x$, pentru orice număr real x, deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p** **3p**
c)	$-2+x+4x^2\le 3$, deci $4x^2+x-5\le 0$ $x\in\left[-\frac{5}{4},1\right]$ și, cum x este număr întreg, obținem $x=-1$ sau $x=0$ sau $x=1$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(e^x\right)'+\left(x^4\right)'-(2x)'+(2)'=$ $=e^x+4x^3-2+0=e^x+4x^3-2$, $x\in\mathbb{R}$	**2p** **3p**
b)	$f(0)=3$, $f'(0)=-1$ Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=-x+3$	**2p** **3p**
c)	$f''(x)=e^x+12x^2$, $x\in\mathbb{R}$ $f''(x)\ge 0$, pentru orice număr real x, deci funcția f este convexă	**3p** **2p**
2.a)	$\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3\left(x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^3 xdx=\left.\frac{x^2}{2}\right\|_1^3=$ $=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=4$	**3p** **2p**
b)	$\int_1^2\left(f(x)+\frac{1}{x}\right)\ln xdx=\int_1^2 x\ln xdx=\int_1^2\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln xdx=\left.\frac{x^2}{2}\ln x\right\|_1^2-\int_1^2\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=$ $=\frac{4}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 1-\left.\frac{x^2}{4}\right\|_1^2=2\ln 2-\frac{3}{4}$	**3p** **2p**
c)	$\int_1^{\sqrt{2}} x^{n+1}f^n(x)dx=\int_1^{\sqrt{2}} x\left(x^2-1\right)^n dx=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}}\left(x^2-1\right)'\left(x^2-1\right)^n dx=\left.\frac{\left(x^2-1\right)^{n+1}}{2(n+1)}\right\|_1^{\sqrt{2}}=\frac{1}{2(n+1)}$ Cum $2(n+1)\le 2021\Leftrightarrow n\le\frac{2019}{2}$, obținem că 1009 este cel mai mare număr natural nenul pentru care $\int_1^{\sqrt{2}} x^{n+1}f^n(x)dx\ge\frac{1}{2021}$	**3p** **2p**