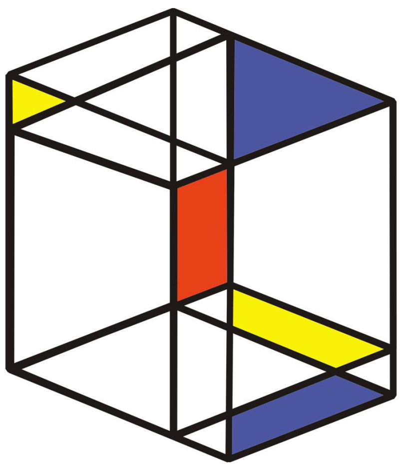
SANDU PETRESCU

Matematică pentru bacalaureat

Filiera tehnologică M2



2015

ISBN 978-973-0-20180-2

Cuprins

Notă introductivă

Această mini-culegere de exerciții și probleme de matematică se adresează elevilor de liceu din clasele a IX-a – a XII-a, filiera tehnologică.

Conține subiectele propuse de Ministerul Educației Naționale și Cercetării Științifice la examenul de bacalaureat național, proba **E. c) Matematică *M_tehnologic***, sesiunea iunie – iulie, sesiunea august – septembrie, sesiunea specială, subiectele de rezervă, precum şi subiectele propuse la simularea examenului de bacalaureat şi modelele de subiecte din perioada 2009 – 2014.

Am păstrat forma originală a enunțurilor, dar am preferat o sistematizare a lor, desigur, relativă, pe ani de studiu, discipline, sau unități mari de învățare. În acest fel, este mai vizibilă o anume standardizare, de-a lungul celor cinci ani, a conținuturilor tematice la care fac referire aceste subiecte și, în plus, materialul devine mai adecvat folosirii lui în cadrul orelor de recapitulare trimestrială sau finală.

Din motive didactice, soluțiile exercițiilor și problemelor propuse, cele mai multe dintre ele detaliate, sunt separate de enunțuri. Navigarea între acestea se poate face rapid, folosind linkurile colorate în **burgundy**.

1 Algebră – clasa a IX-a. Enunțuri

1. Arătați că $5(2+\sqrt{3})-5\sqrt{3}=10$.
2. Arătați că $2\left(5-\sqrt{2}\right)+2\sqrt{2}=10$.
3. Arătați că $3\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)=1$.
4. Arătați că $\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=1$.
5. Arătați că numărul $3\left(4+\sqrt{3}\right)-\sqrt{27}$ este natural.
6. Arătați că $3\left(2-\sqrt{2}\right)+3\sqrt{2}=6$.
7. Arătați că $3\left(2+\sqrt{2}\right)-3\sqrt{2}=6$.
8. Arătați că $3(4-\sqrt{3})+3\sqrt{3}=12$.
9. Arătați că $2^{-1}+2^{-2}=0,75$.
10. Ordonați crescător numerele $\sqrt{12}$, $2\sqrt{2}$ și 3.
11. Calculați suma primilor trei termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_2=4$.
12. Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_4=7$ și $a_9=22$. Calculați a_{14}.
13. Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_1=5$ și $r=2$. Calculați suma primilor 5 termeni ai progresiei.
14. Determinați $x\in\mathbb{R}$ pentru care numerele $x-1$, $x+1$ și $3x-1$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
15. Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_2=6$ și $a_3=5$. Calculați a_6.
16. Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_3=5$ și $a_5=11$. Calculați suma primilor șapte termeni ai progresiei.
17. Determinați numărul real a știind că $f(1)=a$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+3$.
18. Determinați numărul real m, știind că $f(m)=1$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-4$.
19. Determinați numerele întregi x care verifică relația $-1\leq\frac{x+1}{3}<1$.
20. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+4$ cu axa Oy.
21. Se consideră funția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2014x-2013$. Calculați $(f(1))^{2014}$.
22. Calculați $f(1)+f(2)+\ldots+f(10)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3$.
23. Calculați $f(-3)+f(3)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-9$.
24. Calculați $f(-2)\cdot f(0)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$.

25. Calculați $f(-4) + f(4)$ pentru funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 16$.

26. Se consideră funția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5 - x$. Calculați $f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(10)$.

27. Determinați numărul real m pentru care vârful parabolei asociate funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 3mx + 1$ are abscisa egală cu $\frac{3}{2}$.

28. Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - x + 3$.

29. Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

30. Se consideră funția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 + 2x - 5$. Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care abscisa vârfului parabolei asociate funcției f este egală cu 2.

31. Determinați soluțiile întregi ale inecuației $2x^2 - x - 3 \leq 0$.

32. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x - 2)^2 - x^2 + 8 = 0$.

33. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(3x + 2)^2 = 4$.

34. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\frac{2}{x-3} < 0$.

35. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - 3$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 5 - x$.

36. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2x + 3$.

37. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x + 3$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și g.

38. Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$.

39. Determinați numărul real m, știind că punctul $A(0, 1)$ aparține graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + m - 3$.

40. Se consideră funția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + ax + b$. Determinați numerele reale a și b pentru care graficul funcției f conține punctele $A(2, 3)$ și $B(-1, 0)$.

41. Determinați funcția de gradul al doilea al cărei grafic conține punctele $A(0, 0)$, $B(2, 2)$ și $C(-1, 2)$.

42. Determinați numărul real m pentru care ecuația $x^2 - (m + 1)x + m = 0$ are soluții reale egale.

2 Algebră – clasa a X-a. Enunțuri

1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x^2 + 1} = 1$.

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x + 2} = x + 2$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x - 1} = x - 3$.

4. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2-\sqrt{2-x}=x$.
5. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^2-1}=2$.
6. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{3x-1}=9$.
7. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2-3x}=3^{x+6}$.
8. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x-2}=25$.
9. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{2x}=25$.
10. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x}=9$.
11. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{3-x}=\frac{1}{4}$.
12. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $7^x+7^{x+1}=392$.
13. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x+3^{x+1}=36$.
14. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2-3^{x^2-1}=1$.
15. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{1-x^2}=\frac{1}{27}$.
16. Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2^{x+1}-1$ cu axele Ox și respectiv Oy.
17. Se consideră funcțiile
$f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\log_2(x+1)$ și $g:\mathbb{R}\to(-1,+\infty),\ g(x)=2^x-1$.
Calculați $f\left(g(1)\right)$.
18. Calculați $\log_6 3+\log_6 12$.
19. Calculați $\log_7\left(3+\sqrt{2}\right)+\log_7\left(3-\sqrt{2}\right)$.
20. Calculați $\log_2\left(3+\sqrt{5}\right)+\log_2\left(3-\sqrt{5}\right)$.
21. Calculați $\log_2\frac{1}{8}+\sqrt[3]{27}$.
22. Se consideră numărul $a=\log_3 2$. Arătați că $\log_3 6=1+a$.
23. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2x+1)=\log_2 5$.
24. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7(x^2+8)=\log_7(6x)$.
25. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2+1)=\log_3 1$.
26. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x+1)-\log_2(x+3)=-1$.
27. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x+2)-\log_3(x-4)=1$.
28. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x+3)-\log_2 x=2$.
29. Calculați $5C_4^2-A_5^2$.
30. Calculați $2C_4^2-3A_4^1$.

31. Calculați $\dfrac{P_5}{C_5^2 + A_6^2}$.

32. Calculați $C_6^2 - A_4^2$.

33. Determinați $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, pentru care $C_n^2 = 4A_n^1$.

34. Determinați câte numere naturale de 3 cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $M = \{0, 1, 2, 3\}$.

35. Determinați câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$.

36. Numărul submulțimilor cu două elemente ale unei mulțimi este egal cu 10. Determinați numărul elementelor mulțimii.

37. Determinați numărul submulțimilor ordonate cu 2 elemente ale unei mulțimi cu 7 elemente.

38. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\{1, 2, 3, \ldots, 30\}$, acesta să fie divizibil cu 7.

39. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea $\{10, 11, 12, \ldots, 99\}$, acesta să fie divizibil cu 4.

40. Calculați probabilitatea ca alegând la întâmplare un element din mulțimea $\{1, 2, 3, 4\}$, acesta să verifice inegalitatea $2^n \geq n^2$.

41. Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10.

42. Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie mai mic sau egal cu 3.

43. Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie divizor al lui 10.

44. În anul 2013, profitul anual al unei firme a fost de 100000 de lei, ceea ce reprezintă 4% din valoarea veniturilor anuale ale firmei. Determinați valoarea veniturilor anuale ale firmei în anul 2013.

45. După o scumpire cu 30%, prețul unui obiect este 325 de lei. Determinați prețul obiectului înainte de scumpire.

46. Prețul unui obiect este 100 de lei. Determinați prețul obiectului după o scumpire cu 10%.

47. Prețul unui obiect este 100 de lei. Determinați prețul obiectului după o scumpire cu 20%.

48. Prețul unui obiect este 1000 de lei. Determinați prețul obiectului după o ieftinire cu 10%.

49. Prețul unui obiect este 100 de lei. Determinați prețul obiectului după o ieftinire cu 30%.

50. La o bancă a fost depusă într-un depozit suma de 900 lei cu o dobândă de $p\%$ pe an. Calculați p, știind că, după un an, în depozit suma este de 1008 lei.

51. După o scumpire cu 5%, prețul unui produs crește cu 12 lei. Calculați prețul produsului înainte de scumpire.

52. Calculați a și b știind că $a + b = 150$ și numărul a reprezintă 25% din numărul b.

3 Geometrie și trigonometrie. Enunțuri

1. Determinați aria triunghiului ABC dreptunghic în A știind că $AB = 6$ și $BC = 10$.

2. Calculați lungimea diagonalei BD a rombului $ABCD$ în care $AB = 4$ și $m(\sphericalangle ABC) = 120°$.

3. Un triunghi dreptunghic are catetele $AB = 3$, $AC = 4$. Determinați lungimea înălțimii duse din A.

4. Determinați lungimea laturii unui triunghi echilateral, care are aria egală cu $4\sqrt{3}$.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 5)$ și $B(3, 5)$. Calculați distanța de la punctul A la punctul B.

6. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5, 6)$, $B(2, 6)$ și $C(5, 2)$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic.

7. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(4, 1)$ și $C(4, 4)$. Arătați că $AB = BC$.

8. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 3)$ și $B(-1, 1)$. Determinați ecuația dreptei AB.

9. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(2, 3)$ și $B(-1, 0)$. Scrieți ecuația dreptei AB.

10. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 4)$ și $B(5, 0)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului $[AB]$.

11. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P(1, 3)$ și $R(3, 3)$. Determinați coordonatele punctului Q, știind că R este mijlocul segmentului PQ.

12. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 1)$ și $B(1, 3)$. Calculați distanța de la punctul A la punctul B.

13. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 1)$ și $B(3, 1)$. Calculați distanța de la punctul A la punctul B.

14. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P(2, 1)$ și $R(2, 3)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului PR.

15. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 4)$ și $B(2, 1)$. Calculați distanța de la punctul A la punctul B.

16. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0, 0)$, $A(5, 1)$, $B(3, 5)$. Calculați lungimea medianei din vârful O în triunghiul OAB.

17. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(4, -1)$. Determinați coordonatele punctului B, știind că O este mijlocul segmentului (AB).

18. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(2,-2)$ și $B(6,8)$. Calculați distanța de la punctul O la mijlocul segmentului (AB).

19. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A(2,3)$. Determinați coordonatele punctului B, știind că A este mijlocul segmentului (OB).

20. Într-un reper cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$ și $B(3,0)$. Determinați coordonatele simetricului punctului A față de punctul B.

21. Calculați distanța de la punctul $A(2,3)$ la punctul de intersecție a dreptelor $d_1 : 2x - y - 6 = 0$ și $d_2 : -x + 2y - 6 = 0$.

22. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,-2)$ și $B(4,m)$, unde $m \in \mathbb{R}$. Determinați valorile lui m pentru care $AB = 5$.

23. Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care punctele $A(2,3), B(4,5)$ și $C\left(m+1, m^2\right)$ sunt coliniare.

24. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-6,3)$ și $B(2,5)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului (AB).

25. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A_n(n-1, n+2)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Determinați ecuația dreptei A_1A_2.
b) Demonstrați că punctele A_m, A_n, A_p sunt coliniare, oricare ar fi $m, n, p \in \mathbb{N}^*$.
c) Pentru fiecare $p \in \mathbb{N}^*$, notăm $M_p = \{n \in \mathbb{N}^* / A_nA_p \leq 2\}$. Determinați elementele mulțimii M_{2011}.

26. Se consideră punctele $A_n\left(2^n, 3^n\right)$, unde $n \in \mathbb{N}$.
a) Scrieți ecuația dreptei A_0A_1.
b) Demonstrați că punctele A_1, A_2, A_3 nu sunt coliniare.
c) Determinați numărul natural n pentru care aria triunghiului $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ este egală cu 216.

27. Arătați că $\text{tg}^2 60° + \text{tg}^2 45° = 4$.

28. Arătați că $\sqrt{3}\cos 30° + \sqrt{2}\sin 45° = \dfrac{5}{2}$.

29. Arătați că $\sin 10° + \sin 30° - \sin 170° = \dfrac{1}{2}$.

30. Calculați $\cos 45° + \cos 135°$.

31. Calculați $\cos 30° + \cos 150°$.

32. Calculați $\cos 40° + \cos 140°$.

33. Calculați $\cos 130° + \cos 50°$.

34. Arătați că $\sin^2 30° + \cos^2 45° = \dfrac{3}{4}$.

35. Calculați $\cos x$, știind că $\sin x = \dfrac{1}{3}$ și $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

36. Calculați $\cos B$, știind că $\sin B = \dfrac{5}{13}$ și unghiul B este ascuțit.

37. Calculați $\cos A$, știind că $\sin A = \dfrac{1}{2}$ și unghiul A este ascuțit.

38. Determinați măsura x a unui unghi ascuțit, știind că $\dfrac{\sin x + 4\cos x}{\cos x} = 5$.

39. Se consideră triunghiul MNP cu $MP = 6$, $\sin N = \dfrac{3}{5}$ și $\sin P = \dfrac{4}{5}$. Calculați lungimea laturii (MN).

40. Aria triunghiului MNP este egală cu 16, iar $MN = NP = 8$. Calculați $\sin N$.

41. Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC, știind că $AB = 6$, $AC = 5$ și $m(\sphericalangle BAC) = 60°$.

42. Calculați cosinusul unghiului A al triunghiului ABC, știind că $AB = 5, AC = 6$ și $BC = 7$.

43. Calculați cosinusul unghiului M al triunghiului MNP, știind că $MN = 4$, $MP = 5$ și $NP = 6$.

44. Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $BC = 9$ și $m(\sphericalangle BAC) = 120°$.

45. Calculați perimetrul triunghiului MNP știind că $MN = 2$, $MP = 3$ și $m(\sphericalangle NMP) = 120°$.

46. Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $AB = 6$ și $m(\sphericalangle ACB) = 30°$.

47. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2, -1)$ și $N(-1, 3)$. Determinați coordonalele vectorului $\overline{OM} + \overline{ON}$.

48. Se consideră vectorii $\overline{v}_1 = 2\overline{i} + a\overline{j}$ și $\overline{v}_2 = (a+3)\overline{i} + 2\overline{j}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Determinați numărul $a > 0$ pentru care vectorii $\overline{v}_1$ și $\overline{v}_2$ sunt coliniari.

49. Se consideră vectorii $\overline{v}_1 = 2\overline{i} - \overline{j}$ și $\overline{v}_2 = \overline{i} + 3\overline{j}$. Determinați coordonatele vectorului $\overline{w} = 2\overline{v}_1 - \overline{v}_2$.

50. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(2, 0), B(1, -1), O(0, 0)$. Determinați coordonatele punctului C pentru care $\overline{OC} = 2\overline{OA} + \overline{OB}$.

4 Matrice și determinanți. Sisteme liniare. Enunțuri

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 3 & x \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
   a) Arătați că $\det A = 0$.
   b) Determinați numărul real x știind că $B + C = A$.
   c) Arătați că $B \cdot B + B = O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   a) Arătați că $\det A = -1$.
   b) Arătați că $2A \cdot B - B \cdot A = I_2$.
   c) Determinați numărul real x știind că $A \cdot A - xA = I_2$.

3. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $\det A = 0$.
b) Arătați că $A \cdot A = 5A$.
c) Determinați numerele reale x și y pentru care $A + \begin{pmatrix} x & y \\ y & -3 \end{pmatrix} = I_2$.

4. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det A$.
b) Determinați numărul real m pentru care matricele $A + mI_3$ și $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ sunt egale, unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
c) Rezolvați ecuația matriceală $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, umde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

5. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det A$.
b) Arătați că $B \cdot A - A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
c) Determinați numerele reale x pentru care $\det(A + xB) = 0$.

6. Pentru fiecare număr real a se consideră matricea $M(a) = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $M\left(\frac{1}{2}\right) + M\left(-\frac{1}{2}\right) = M(0)$.
b) Determinați numărul real a pentru care $\det(M(a)) = 0$.
c) Determinați matricea $M(-2) + M(-1) + M(0) + M(1) + M(2)$.

7. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Calculați $\det A$.
b) Pentru $x = 0$ arătați că $A - B = I_2$.
c) Determinați numărul real x pentru care $\det(A + B) = 0$.

8. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det A$.
b) Determinați numărul real x pentru care $A \cdot A - xI_2 = A$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
c) Determinați matricele $M = \begin{pmatrix} m & m \\ m & 1 \end{pmatrix}$, știind că $\det(M + A) = 0$, unde m este un număr real.

9. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, unde b este număr real.
a) Calculați $\det A$.
b) Determinați numărul real b pentru care $A \cdot B = 2I_2$.
c) Determinați numărul real b pentru care $\det(A + B) = 0$.

10. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & x \\ 2 & -1 & x \\ x & x & 2 \end{pmatrix}$ și se notează determinantul ei cu $\Delta(x)$.
a) Calculați $\Delta(1)$.
b) Arătați că $\Delta(x) = 6(x^2 - 1)$, pentru orice număr real x.
c) Determinați inversa matricei $A(0)$.

11. Se consideră matricele $H(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cu $x \in (0, +\infty)$.
a) Arătați că $\det(H(x)) = 1$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
b) Determinați numărul real a, $a > 0$, astfel încât $H(x) \cdot H(a) = H(x)$, pentru orice $x > 0$.
c) Calculați determinantul matricei $H(1) + H(2) + \ldots + H(2012)$.

12. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - y + z = 1 \\ x + y + az = 2 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$.
a) Calculați determinantul matricei asociate sistemului.
b) Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea asociată sisitemului este inversabilă.
c) Pentru $a = 0$, rezolvați sistemul de ecuații.

13. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} mx - 2y + z = 1 \\ 2x - my - 3z = 3 \\ x - y + 2z = 4 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.
a) Arătați că suma elementelor de pe diagonala principală a matricei sistemului este egală cu 2.
b) Determinați valorile reale ale lui m pentru care matricea sistemului are determinantul diferit de 0.
c) Pentru $m = 1$, arătați că $y_1^2 = x_1 \cdot z_1$, unde (x_1, y_1, z_1) este soluția sistemului.

14. Se consideră sistemul $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + ay + 3z = 1 \\ 4x + a^2 y + 9z = 1 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$ și se notează cu A matricea sistemului.
a) Arătați că $\det A = -a^2 + 5a - 6$.
b) Determinați valorile reale ale numărului a pentru care matricea A este inversabilă.
c) Pentru $a = 1$, rezolvați sistemul.

15. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ și $X(a) = I_2 + aA$, unde $a \in \mathbb{Z}$.
a) Calculați $A^2 - 3A$.

b) Demonstrați că $X(a) \cdot X(b) = X(a+b+3ab)$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Z}$.
c) Arătați că $X(a)$ este matrice inversabilă, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$.

16. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} mx - y + z = 0 \\ x + my - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$, unde m este parametru real.
a) Calculați determinantul matricei A.
b) Determinați valorile reale ale lui m pentru care tripletul $(-1, 2, 5)$ este o soluție a sistemului.
c) Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul admite doar soluția $(0, 0, 0)$.

17. Se consideră determinantul $D(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x+1 & y+1 \end{vmatrix}$, unde $x, y \in \mathbb{Z}$.
a) Calculați $D(-1, 1)$.
b) Determinați $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $D(x, 2010) = 1$.
c) Demonstrați că $D(x, y) \cdot D(x, -y) = D(x^2, y^2)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Z}$.

18. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Calculați determinantul matricei A.
b) Calculați $A^2 - 2A + I_2$.
c) Determinați matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $X^2 = A$.

19. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Calculați determinantul matricei A.
b) Verificați dacă $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde A^{-1} este inversa matricei A.
c) Rezolvați ecuația $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

20. Pentru $m \in \mathbb{R}$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații

$$\begin{cases} mx + y = -1 \\ x + y + z = 3 \\ x + y + mz = 0 \end{cases}, \text{unde } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

a) Calculați determinantul matricei A.
b) Rezolvați sisemul pentru $m = 0$.
c) Verificați dacă sistemul este incompatibil pentru $m = 1$.

21. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
a) Calculați $A^2 - A$.
b) Determinați inversa matricei A.
c) Rezolvați ecuația $A \cdot X = \begin{pmatrix} 2010 & 2010 \\ 2009 & 2010 \end{pmatrix}$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

22. Pentru $m \in \mathbb{R}$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații
$$\begin{cases} x - y - z = -2 \\ x + 3y - z = -2 \\ mx + 2z = 4 \end{cases}, \text{unde } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

a) Calculați determinantul matricei A.
b) Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care matricea A este inversabilă.
c) Rezolvați sistemul pentru $m = -1$.

5 Legi de compoziție. Enunțuri

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$.
a) Arătați că $0 \circ (-4) = -4$.
b) Arătați că $x \circ y = (x + 4)(y + 4) - 4$, pentru orice numere reale x și y.
c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x = 12$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 2(x + y - 1) - xy$.
a) Arătați că $1 * 2 = 2$.
b) Arătați că $x * 2 = 2 * x = 2$ pentru orice număr real x.
c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x = x$.

3. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x + y + xy$.
a) Arătați că $(-1) \circ 1 = -1$.
b) Arătați că $x \circ y = (x + 1)(y + 1) - 1$ pentru orice numere reale x și y.
c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x + 1) \circ (x - 3) = 4$.

4. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție comutativă
$x * y = x + y - 5$.
a) Arătați că $2 * (-2) = 2014 * (-2014)$.
b) Verificați dacă legea „$*$” este asociativă.
c) Calculați $(-4) * (-3) * (-2) * (-1) * 0 * 1 * 2 * 3 * 4$.

5. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă
$x \circ y = xy - 3(x + y) + 12$.
a) Arătați că $x \circ 3 = 3 \circ x = 3$, pentru orice număr real x.
b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x = x$.
c) Calculați $1 \circ 2 \circ \ldots \circ 2014$.

6. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă dată de $x \circ y = x + y + 3$.
a) Calculați $2 \circ (-2)$.
b) Arătați că $e = -3$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.
c) Determinați numărul real x pentru care $2013 \circ (-2013) = x \circ x$.

7. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă dată de $x * y = x + y - 2$.
a) Calculați $5 * (-5)$.
b) Arătați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.
c) Calculați $(-3) * (-2) * (-1) * 0 * 1 * 2 * 3$.

8. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = x + y - 1$.
a) Arătați că $x * 1 = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x * x = 4$.
c) Determinați numărul natural $n, n \geq 2$, pentru care $C_n^1 * C_n^2 = 14$.

9. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x * y = xy + x + y$.
a) Arătați că legea de compoziție „$*$" este asociativă.
b) Determinați elementul neutru al legii „$*$".
c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x^2 * 2 = x * 4$.

10. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = \frac{1}{2}(xy - x - y + 3)$.
a) Verificați dacă elementul neutru al legii „$\circ$" este $e = 3$.
b) Determinați simetricul elementului 2 în raport cu legea „$\circ$".
c) Arătați că mulțimea $H = \{2k + 1 \setminus k \in \mathbb{Z}\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „$\circ$".

11. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$.
a) Arătați că $x * y = 2(x - 3)(y - 3) + 3$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
b) Arătați că legea „$*$" este asociativă.
c) Calculați $1 * 2 * \ldots * 2011$.

12. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x * y = xy - 3x - 3y + 12$.
a) Demonstrați că $x * y = (x - 3)(y - 3) + 3$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x = 19$.
c) Știind că legea „$*$" este asociativă, calculați $\sqrt[3]{1} * \sqrt[3]{2} * \ldots * \sqrt[3]{2011}$.

13. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = (x - 4)(y - 4) + 4$.
a) Demonstrați că legea „$*$" este asociativă.
b) Demonstrați că $x * y \in (4, +\infty)$, oricare ar fi $x, y \in (4, +\infty)$.
c) Calculați $1 * 2 * 3 * \ldots * 2010$.

14. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 2xy - 2x - 2y + 3$.
a) Demonstrați că $x \circ y = 2(x - 1)(y - 1) + 1$, pentru oricare $x, y \in \mathbb{R}$.
b) Determinați elementul neutru al legii „$\circ$".
c) Dați exemplu de două numere $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ pentru care $a \circ b \in \mathbb{Z}$.

6 Polinoame. Enunțuri

1. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 + 1$.
a) Arătați că $f(1) = 0$.
b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $g = X^2 - 2X + 1$.
c) Calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + 2X$.
a) Calculați $f(1)$.
b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la $X - 2$.
c) Calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

3. În $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 + aX + b$.
a) Calculați $a + b$, știind că $f(1) = 0$.
b) Pentru $a = -1$ și $b = 1$, determinați rădăcinile polinomului f.
c) Determinați numerele reale a și b, știind că $x_1 = 1$ și $x_2 = 2$ sunt rădăcini ale polinomului f.

4. În $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 + 3X^2 - 3X - 1$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.
a) Arătați că polinomul f se divide cu $X - 1$.
b) Calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.
c) Verificați dacă $(2 - x_1)(2 - x_2)(2 - x_3) = 13$.

5. Se consideră polinomul $f = X^3 + mX^2 + mX + 1$, unde $m \in \mathbb{R}$.
a) Pentru $m = 0$, calculați restul împărțirii polinomului f la $X - 1$.
b) Arătați că polinomul f este divizibil cu $X + 1$, pentru orice număr real m.
c) Determinați valorile reale ale lui m pentru care polinomul f are trei rădăcini reale.

6. În $\mathbb{Z}_5[X]$ se consideră polinomul $f = mX^5 + nX$, cu $m, n \in \mathbb{Z}_5$.
a) Determinați $n \in \mathbb{Z}_5$ pentru care $f\left(\hat{1}\right) = m$.
b) Pentru $m = \hat{1}$ și $n = \hat{4}$, determinați rădăcinile din $\mathbb{Z}_5$ ale polinomului f.
c) Arătați că, dacă $f\left(\hat{1}\right) = f\left(\hat{2}\right)$, atunci $f\left(\hat{3}\right) = f\left(\hat{4}\right)$.

7. Se consideră polinomul $f = X^3 + (m - 3)X^2 - 17X + (2m + 7)$, cu $m \in \mathbb{R}$.
a) Pentru $m = 4$ determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la $X - 3$.
b) Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul f este divizibil cu $X - 1$.
c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $27^x + 9^x - 17 \cdot 3^x + 15 = 0$.

8. Polinomul $f = X^3 + 2X^2 - 5X + m$, cu $m \in \mathbb{R}$, are rădăcinile x_1, x_2 și x_3.
a) Calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.
b) Determinați $m \in \mathbb{R}^*$ pentru care $x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3}$.
c) Arătați că determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ este număr natural, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.

9. Fie polinomul $f \in \mathbb{Z}_3[X], f = X^3 + \hat{2}X^2$ și mulțimea

$$G = \left\{ g = aX^3 + bX^2 + cX + d \setminus a, b, c, d \in \mathbb{Z}_3 \right\}.$$

a) Calculați $f\left(\hat{1}\right)$.
b) Determinați rădăcinile polinomului f.
c) Determinați numărul elementelor mulțimii G.

10. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}_3[X], f = X^2 + X,\ g = X^2 + \hat{2}X + a$, cu $a \in \mathbb{Z}_3$.
a) Calculați $f\left(\hat{0}\right) + f\left(\hat{1}\right)$.
b) Determinați rădăcinile polinomului f.
a) Demonstrați că $f\left(\hat{0}\right) + f\left(\hat{1}\right) + f\left(\hat{2}\right) = g\left(\hat{0}\right) + g\left(\hat{1}\right) + g\left(\hat{2}\right)$, pentru oricare $a \in \mathbb{Z}_3$.

7 Analiză matematică – Clasa a XI-a. Enunțuri

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x}$.
a) Arătați că $f'(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.

b) Arătați că $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{3}{4}$.
c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$, situat pe graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)e^x$.
a) Arătați că $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$.
b) Arătați că $f'(x) = e^x + f(x)$ pentru orice număr real x.
c) Arătați că $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+1}{x} = 0$.

3. Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$.
a) Arătați că $\lim_{x\to 3} f(x) = 2$.
b) Arătați că $f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.
c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 3$, situat pe graficul funcției f.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 7$.
a) Arătați că $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -3$.
b) Calculați $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x(2x+1)(3x+2)}$.
c) Demonstrați că $f(x) \geq 5$ pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.

5. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$.
a) Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.
b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 0$, situat pe grficul funcției f.
c) Demonstrați că $e^x \geq x+1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

6. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} - 1$.
a) Arătați că $2\sqrt{x}f'(x) = 1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
b) Verificați dacă dreapta de ecuație $y = \frac{1}{4}x$ este tangentă la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 4$, situat pe graficul funcției f.
c) Arătați că funcția f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.

7. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x}$.
a) Calculați $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
b) Arătați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.
c) Deteminați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$, situat pe graficul funcției f.

8. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.
a) Arătați că $f'(x) = (x+1)e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
b) Verificați dacă $f''(x) + f(x) = 2f'(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
c) Arătați că funcția f are un punct de extrem.

9. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)^3$.
a) Verificați dacă $f'(x) = 3x^2 + 12x + 12$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Arătați că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
c) Calculați $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{x^2}$.

10. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$.
a) Verificați dacă $f'(x)=1+\ln x$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.
b) Arătați că funcția f este crescătoare pe $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.
c) Demonstrați că $f(x)\geq -\frac{1}{e}$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

11. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$.
a) Arătați că $\lim_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=0$.
b) Demonstrați că funcția f este crescătoare pe intervalul $(4,+\infty)$.
c) Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

12. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{e^x}$.
a) Arătați că $\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{x}{x+1}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
b) Arătați că funcția f este descrescătoare pe $(0,+\infty)$.
c) Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției
$g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{e^{2x}\cdot f^2(x)}{x}$.

13. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x^2-1}{x^2+2}$.
a) Arătați că $f'(x)=\frac{10x}{(x^2+2)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c) Demonstrați că $-\frac{1}{2}\leq f(x)\leq\frac{1}{3}$, pentru orice $x\in[0,1]$.

14. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-x-1}{x+1}$.
a) Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$
b) Calculați $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)\cdot\ln x}{x^2-x-1}$.
c) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

15. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{-4}{x^2+1}, & x\leq 0\\ x-4, & x>0\end{cases}$.
a) Demonstrați că funcția f este continuă în punctul $x_0=0$.
b) Calculați $\lim_{x\to4}\frac{f(x)}{16-x^2}$.
c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(-1,-2)$.

16. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-\frac{1}{x}$.
a) Calculați $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

b) Arătați că $f(x) > 0$, oricare ar fi $x \in [1, +\infty)$.
c) Arătați că graficul funcției f nu admite asimptote spre $+\infty$.

17. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+2}{(x-1)^2}$.
a) Arătați că $f'(x) = \dfrac{-x-5}{(x-1)^3}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
b) Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.
c) Arătați că $f(x) + \dfrac{1}{12} \geq 0$, oricare ar fi $x \in (-\infty, 1)$.

18. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + e^x$.
a) Arătați că $xf'(x) = 1 + xe^x$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1, e)$.
c) Calculați $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

19. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x^2 + x + 3^x$.
a) Calculați $f'(0)$.
b) Arătați că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
c) Arătați că $a^3 + a^2 + a - b^3 - b^2 - b \leq 3^b - 3^a$, oricare ar fi numerele reale a, b cu $a \leq b$.

20. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$.
a) Demonstrați că $f'(x) - f(x) = x - 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
b) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f.
c) Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f spre $-\infty$.

21. Se consideră funcția $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$.
a) Demonstrați că $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{x}{x+1}$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$.
b) Demonstrați că funcția f este crescătoare pe $[0, 1]$.
c) Demonstrați că $\dfrac{2}{e} \leq \dfrac{1}{f(x)} \leq 1$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$.

22. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$.
a) Calculați $f'(x)$.
b) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(2, 5)$.
c) Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

23. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot e^x$.
a) Calculați $f'(x)$.
b) Demonstrați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $[-2, 0]$.
c) Demonstrați că $0 \leq f(x) + f\left(x^2\right) \leq \dfrac{e^2+1}{e}$, oricare ar fi $x \in [-1, 0]$.

24. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$.
a) Calculați $f'(x)$.
b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1, 2)$.
c) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .

8 Analiză matematică – Clasa a XII-a. Enunțuri

1. Se consideră funcțiile

   $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-x$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=e^x-\dfrac{x^2}{2}-1.$

   a) Arătați că $\displaystyle\int_0^1 e^x\mathrm{d}x=e-1.$
   b) Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.
   c) Calculați $\displaystyle\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x.$

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x^2+2x.$
   a) Arătați că $\displaystyle\int_0^1 3x^2\mathrm{d}x=7.$
   b) Determinați primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției f pentru care $F(1)=2014.$
   c) Determinați numărul natural n, $n\geq 2$ știind că $\displaystyle\int_1^n \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\frac{13}{2}.$

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+2x+1.$
   a) Arătați că $\displaystyle\int_{-1}^1 (2x+1)\mathrm{d}x=2.$
   b) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)-2x-1.$
   c) Demonstrați că orice primitivă a fucției f este o funcție crescătoare pe $\mathbb{R}$.

4. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x+2x$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=e^x+x^2+2014.$
   a) Calculați $\displaystyle\int_1^2 \left(f(x)-e^x\right)\mathrm{d}x.$
   b) Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.
   c) Calculați $\displaystyle\int_0^1 f(x)F(x)\mathrm{d}x.$

5. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=3-\dfrac{1}{x}.$
   a) Calculați $\displaystyle\int_1^2 \left(3-f(x)\right)\mathrm{d}x.$
   b) Determinați primitiva $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f pentru care $F(1)=3.$
   c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R},\ g(x)=xf(x).$

6. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+1+\dfrac{1}{x}.$
   a) Calculați $\displaystyle\int_1^2 \left(f(x)-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x.$
   b) Arătați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=x^2+x+\ln x$ este o primitivă a funcției f.
   c) Calculați aria suprafeței delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație $x=1$ și $x=2$.

7. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x^2+1.$
   a) Calculați $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x.$
   b) Arătați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=x^3+x+1$ este o primitivă a funcției f.

c) Calculați aria suprafeței delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație $x = 0$ și $x = 1$.

8. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

   a) Calculați $\displaystyle\int_4^5 x f(x) \mathrm{d}x$.

   b) Arătați că funcția $F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = 4 + \ln x$ este o primitivă a funcției f.

   c) Determinați numărul real a, $a > 5$, pentru care aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație $x = 5$ și $x = a$, este egală cu $\ln 3$.

9. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$.

   a) Verificați dacă funcția $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + x$ este o primitivă funcției f.

   b) Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație $x = 0$ și $x = 1$.

   c) Arătați că $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x = \frac{3}{2} + \ln 2$.

10. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$.

    a) Verificați dacă funcția $F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, F(x) = x - \dfrac{1}{x} + \ln x$ este o primitivă a funcției f.

    b) Calculați $\displaystyle\int_1^e x \cdot f\left(x^2\right) \mathrm{d}x$.

    c) Determinați numărul real $a > 1$, pentru care $\displaystyle\int_1^a \left(f(x) - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \frac{3}{2}$.

11. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.

    a) Arătați că funcția $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = xe^x - e^x + 2012$ este o primitivă a funcției f.

    b) Calculați $\displaystyle\int_1^e f(\ln x) \mathrm{d}x$.

    c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

12. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2012} + x^{2011} + x^2 + x$.

    a) Determinați primitiva $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a funcției f, care verifică relația $F(0) = 1$.

    b) Calculați $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1} \mathrm{d}x$.

    c) Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției $g : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x^{2012} - x^{2011}$.

13. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x+1} \mathrm{d}x$.

    a) Calculați I_1.

    b) Arătați că $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

    c) Demonstrați că $\dfrac{1}{4026} \leq I_{2012} \leq \dfrac{1}{2013}$.

14. Se consideră funcția $f \colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \cdot \sqrt{x+1}$.

    a) Determinați primitivele funcției $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{x+1}}$.

b) Calculați $\int_1^2 \sqrt{x+1} \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$.
c) Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției
$h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=e^{-x}\cdot f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=3$.

15. Se consideră funcțiile $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_m(x)=3m^2x^2+6mx+9$, unde $m\in\mathbb{R}$.
a) Determinați mulțimea primitivelor funcției f_0.
b) Calculați aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f_1, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.
c) Calculați $\int_1^2 \frac{f_2(x)-9}{x}e^x\mathrm{d}x$.

16. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+10}$.
a) Calculați volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției $g:[0,3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.
b) Demonstrați că orice primitivă F a funcției f este crescătoare pe mulțimea $\mathbb{R}$.
c) Demonstrați că $\int_{-10}^{10} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x$.

17. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln x}{x}, & x>1\\ \frac{x-1}{x}, & 0<x\le 1\end{cases}$.
a) Calculați $\int_2^e \frac{f(x)}{\ln x}\mathrm{d}x$.
b) Fie $g:(0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$. Determinați primitiva funcției g, primitivă al carei grafic conține punctul $A(1,5)$.
c) Calculați $\int_{\frac{1}{2}}^e f(x)\mathrm{d}x$.

18. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+2x+1$.
a) Calculați aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.
b) Arătați că orice primitivă a funcției f este concavă pe intervalul $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$.
c) Demonstrați că, oricare ar fi $a\ge 2$, are loc inegalitatea $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \ge 3a^2+2$.

18. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră funcția
$f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^ne^x$.
a) Calculați $\int_0^1 \frac{f_1(x)}{e^x}\mathrm{d}x$.
b) Calculați $\int_0^1 f_1(x)\mathrm{d}x$.
c) Arătați că $\int_0^1 f_n\left(x^2\right)\mathrm{d}x \ge \frac{1}{2n+1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}, n\ge 1$.

20. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$.
a) Calculați $\int_1^e \left(f(x)-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$.
b) Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație $x=1$ și $x=2$.

c) Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

21. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+3}, & \text{pentru } x\geq 1\\ 2x, & \text{pentru } x<1\end{cases}$.

a) Demonstrați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.
b) Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.
c) Calculați $\displaystyle\int_1^{\sqrt{6}} x\cdot f(x)\mathrm{d}x$.

22. Se consideră funcțiile $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ și $g(x)=2\sqrt{x}(\ln x-2)$.

a) Demonstrați că funcția g este o primitivă a funcției f.
b) Calculați $\displaystyle\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x$.
c) Calculați $\displaystyle\int_1^{e^2} 2^{g(x)}\cdot f(x)\mathrm{d}x$.

23. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

a) Calculați $\displaystyle\int_1^3\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.
b) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.
c) Calculați $\displaystyle\int_1^e f(x)\cdot\ln x\mathrm{d}x$.

24. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n\ln x$.

a) Calculați $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{f_1(x)}\mathrm{d}x$.
b) Demonstrați că primitivele funcției f_1 sunt convexe pe intervalul $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$.
c) Calculați $\displaystyle\int_1^e\frac{f_{2009}(x)}{x^{2010}}\mathrm{d}x$.

9 Algebră – clasa a IX-a. Soluții

1. $5(2+\sqrt{3})-5\sqrt{3}=10+5\sqrt{3}-5\sqrt{3}=10.$ □

2. $2(5-\sqrt{2})+2\sqrt{2}=10-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}=10.$ □

3. $3\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)=3\cdot\frac{1}{3}=1.$ □

4. $\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1.$ □

5. $3\left(4+\sqrt{3}\right)-\sqrt{27}=12+3\sqrt{3}-3\sqrt{3}=12\in\mathbb{N}.$ □

6. $3\left(2-\sqrt{2}\right)+3\sqrt{2}=6-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}=6.$ □

7. $3\left(2+\sqrt{2}\right)-3\sqrt{2}=6+3\sqrt{2}-3\sqrt{2}=6.$ □

8. $3(4-\sqrt{3})+3\sqrt{3}=12-3\sqrt{3}+3\sqrt{3}=12.$ □

9. $2^{-1}+2^{-2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=0,75.$ □

10. $2\sqrt{2}=\sqrt{8}$ și $3=\sqrt{9}$. Cum $8<9<12$, rezultă $\sqrt{8}<\sqrt{9}<\sqrt{12}$.
Deci $2\sqrt{2}<3<\sqrt{12}$. □

11. Dacă r este rația progresiei, atunci $a_1=4-r$ și $a_3=4+r$.
Rezultă $a_1+a_2+a_3=(4-r)+4+(4+r)=12.$ □

12. Fie r rația progresiei. Din $a_4=a_1+3r$ și $a_9=a_1+8r$ rezultă $a_9-a_4=5r$, adică $5r=15$. Deci $r=3$ și $a_1=a_4-3r=7-3\cdot3=-2$. Termenul $a_{14}=a_1+13r=-2+13\cdot3=37$. □

13. Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$ este $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$.
Cum $a_5=a_1+4r=5+4\cdot2=13$, avem $S_5=\frac{5(a_1+a_5)}{2}=\frac{5(5+13)}{2}=45.$ □

14. Trei numere: a,b,c sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice numai dacă $b=\frac{a+c}{2}$. Rezultă $x+1=\frac{(x-1)+(3x-1)}{2}$, ecuație echivalentă cu $x+1=\frac{4x-2}{2}$, sau $x+1=2x-1$, cu soluția $x=2$. □

15. Rația progresiei este $r=a_3-a_2=5-6=-1$, iar $a_1=a_2-r=6-(-1)=7$. Termenul $a_6=a_1+5r=7+5\cdot(-1)=2$. □

16. Fie r rația progresiei $(a_n)_{n\geq1}$ și S_7 suma primilor 7 termeni ai acesteia. Din $a_5=a_3+2r$ rezultă $11=5+2r$, deci $r=3$. Primul termen este $a_1=a_3-2r=5-2\cdot3=-1$, iar $a_7=a_5+2r=11+2\cdot3=17$. Atunci, $S_7=\frac{7(a_1+a_7)}{2}=\frac{7(-1+17)}{2}=56.$ □

17. $f(1)=1+3=4$, deci $a=4$. □

18. $f(m)=m-4=1$, deci $m=5$. □

19. $-1\leq\frac{x+1}{3}<1\Leftrightarrow-3\leq x+1<3\Leftrightarrow-4\leq x<2$. Deci $x\in\{-4,-3,-2,-1,0,1\}$. □

20. Punctul de intersecție a graficului funției f cu axa Oy are coordonatele $(0, f(0)) = (0, 4)$. $\square$

21. $f(1) = 2014 \cdot 1 - 2013 = 1$; $(f(1))^{2014} = 1^{2014} = 1$. $\square$

22. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, notăm $a_n = f(n) = 2n + 3$. Avem $a_{n+1} - a_n = f(n+1) - f(n) = 2(n+1)+3-(2n+3) = 2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică de rație $r = 2$ și $a_1 = f(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$, $a_{10} = f(10) = 2 \cdot 10 + 3 = 23$. Prin urmare, $f(1)+f(2)+\ldots+f(10) = a_1+a_2+\ldots+a_{10} = \dfrac{10(a_1 + a_{10})}{2} = \dfrac{10(5+23)}{2} = 140$. $\square$

23. $f(-3) = (-3)^2 - 9 = 0$; $f(3) = 3^2 - 9 = 0$; $f(-3) + f(3) = 0$. $\square$

24. $f(-2) = -2 + 1 = -1$; $f(0) = 0 + 1 = 1$; $f(-2) \cdot f(0) = -1 \cdot 1 = -1$. $\square$

25. $f(-4) = (-4)^2 - 16 = 0$; $f(4) = 4^2 - 16 = 0$; $f(-4) + f(4) = 0$. $\square$

26. $f(5) = 5 - 5 = 0 \Rightarrow f(0) \cdot f(1) \cdot \ldots \cdot f(5) \cdot \ldots \cdot f(10) = 0$. $\square$

27. Vârful parabolei asociate funcției de gradul al II-lea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ are coordonatele $x_v = -\dfrac{b}{2a}$ și $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$, unde $\Delta = b^2 - 4ac$. Pentru funcția din enunț, $x_v = \dfrac{-3m}{2 \cdot (-1)} = \dfrac{3m}{2}$. Cum $x_v = \dfrac{3}{2}$, din egalitatea $\dfrac{3m}{2} = \dfrac{3}{2}$ rezultă $m = 1$. $\square$

28. Vârful parabolei are coordonatele

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{4};\ y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1 - 4 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 2} = \frac{23}{8}.$$ $\square$

29. $x_v = 1$ și $y_v = 2$. $\square$

30. $x_v = -\dfrac{1}{m} = 2 \Rightarrow m = -\dfrac{1}{2}$. $\square$

31. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ o funcție de gradul al II-lea. În cazul $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are soluțiile $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. Presupunînd $x_1 < x_2$, semnul funcției f este dat de următorul tabel:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$	semnul lui a		0	semn contrar lui a	0	semnul lui a	

Pentru $f(x) = 2x^2 - x - 3$, $a = 2 > 0$, $\Delta = 25$, $x_1 = -1$ și $x_2 = \dfrac{3}{2}$. Deci $f(x) \leq 0$ pentru $x \in \left[-1, \dfrac{3}{2}\right]$, iar numerele întregi din acest interval sunt: $-1, 0, 1$. $\square$

32. $(x-2)^2 - x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = 3$. $\square$

33. $(3x + 2)^2 = 4 \Leftrightarrow 3x + 2 = \pm 2$.
$3x + 2 = 2 \Rightarrow x_1 = 0$, iar $3x + 2 = -2 \Rightarrow x_2 = -\dfrac{4}{3}$. $\square$

34. $\dfrac{2}{x-3} < 0 \Leftrightarrow x - 3 < 0 \Leftrightarrow x < 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 3)$. $\square$

35. Fie G_f și G_g graficele funcțiilor f, respectiv g. Notăm cu $P(a,b),\ a,b \in \mathbb{R}$, punctul de intersecție a celor doua grafice. $P(a,b) \in G_f \Leftrightarrow f(a) = b$ și $P(a,b) \in G_g \Leftrightarrow g(a) = b$. Deci $f(a) = g(a)$, adică $a - 3 = 5 - a$. Rezultă $a = 4$ și $b = f(4) = 1$. $\square$

36. Fie $P(a,b),\ a,b \in \mathbb{R}$, punctul de intersecție a celor două grafice. Din $f(a) = g(a)$ rezultă $2a - 1 = a^2 - 2a + 3$, ecuație echivalentă cu $a^2 - 4a + 4 = 0$. Soluția acestei ecuații este $a = 2$, iar $b = f(2) = 3$. $\square$

37. Fie $P(a,b),\ a,b \in \mathbb{R}$, punctul de intersecție a celor două grafice. Din $f(a) = g(a)$ rezultă $2a - 1 = a + 3$, de unde $a = 4$ și $b = f(4) = 7$. $\square$

38. Înlocuind $y = 5 - x$ în $xy = 6$, obținem ecuația $x^2 - 5x + 6 = 0$, cu soluțiile $x_1 = 2$ și $x_2 = 3$. Pentru $x_1 = 2$ rezultă $y_1 = 5 - 2 = 3$, iar pentru $x_2 = 3$ rezultă $y_2 = 2$. Sistemul are două soluții: $(2,3)$ și $(3,2)$. $\square$

39. Punctul $A(0,1)$ aparține graficului funcției f numai dacă $f(0) = 1$. Rezultă $m - 3 = 1$, deci $m = 4$. $\square$

40. Condițiile $f(2) = 3$ și $f(-1) = 0$ conduc la rezolvarea sistemului $\begin{cases} 2a + b = -1 \\ -a + b = -1 \end{cases}$. Rezultă $a = 0$ și $b = -1$. $\square$

41. Funcția cerută este de forma $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Se impun condițiile: $f(0) = 0, f(2) = 2, f(-1) = 2$. Din $f(0) = 0$ rezultă $c = 0$, iar din celelalte două egalități rezultă sistemul $\begin{cases} 2a + b = 1 \\ a - b = 2 \end{cases}$, cu soluția $a = 1, b = -1$. Deci $f(x) = x^2 - x$. $\square$

42. Discriminantul ecuației este $\Delta = (m+1)^2 - 4m = m^2 - 2m + 1$. Cele două soluții ale ecuației sunt egale atunci când $\Delta = 0$, adică $m^2 - 2m + 1 = 0$, de unde $m = 1$. $\square$

10 Algebră – clasa a X-a. Soluții

1. $2x^2+1 \geq 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, deci $x \in \mathbb{R}$, iar $\sqrt{2x^2+1}=1 \Leftrightarrow 2x^2+1=1 \Leftrightarrow x=0$. $\square$

2. Este necesar ca $x+2 \geq 0$, deci $x \in [-2,+\infty)$. Pentru $x \in [-2,+\infty)$, ecuația $\sqrt{x+2} = x+2$ este echivalentă cu $x+2=(x+2)^2$, sau $(x+2)^2-(x+2)=0$, adică $(x+2)(x+1)=0$. Rezultă $x_1=-2$ şi $x_2=-1$, care aparțin intervalului $[-2,+\infty)$. $\square$

3. Din $x-1 \geq 0$ şi $x-3 \geq 0$ rezultă $x \in [3,+\infty)$. Pentru $x \in [3,+\infty)$, avem: $\sqrt{x-1} = x-3 \Leftrightarrow x-1=(x-3)^2 \Leftrightarrow x-1=x^2-6x+9 \Leftrightarrow x^2-7x+10=0$. Această ecuație are o singură soluție în intervalul $[3,+\infty)$, anume $x=5$. $\square$

4. $2-\sqrt{2-x}=x \Leftrightarrow 2-x=\sqrt{2-x}$. Pentru $2-x \geq 0$, ambii membri ai acestei ecuații sunt pozitivi, deci pentru $x \in (-\infty,2]$ avem: $2-x=\sqrt{2-x} \Leftrightarrow (2-x)^2=2-x \Leftrightarrow (2-x)^2-(2-x)=0 \Leftrightarrow (2-x)(1-x)=0$, cu soluțiile $x_1=1, x_2=2$, care aparțin intervalului $(-\infty,2]$. $\square$

5. $\sqrt[3]{x^2-1}=2 \Leftrightarrow x^2-1=8 \Leftrightarrow x^2=9$. Deci $x_1=3$ şi $x_2=-3$. $\square$

6. $3^{3x-1}=9 \Leftrightarrow 3^{3x-1}=3^2 \Leftrightarrow 3x-1=2 \Leftrightarrow x=1$. $\square$

7. $3^{2-3x}=3^{x+6} \Leftrightarrow 2-3x=x+6 \Leftrightarrow 4x=-4 \Leftrightarrow x=-1$. $\square$

8. $5^{x-2}=25 \Leftrightarrow 5^{x-2}=5^2 \Leftrightarrow x-2=2 \Leftrightarrow x=4$. $\square$

9. $5^{2x}=25 \Leftrightarrow 5^{2x}=5^2 \Leftrightarrow 2x=2 \Leftrightarrow x=1$. $\square$

10. $3^{2x}=9 \Leftrightarrow 3^{2x}=3^2 \Leftrightarrow 2x=2 \Leftrightarrow x=1$. $\square$

11. $2^{3-x}=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{3-x}=2^{-2} \Leftrightarrow 3-x=-2 \Leftrightarrow x=5$. $\square$

12. $7^x+7^{x+1}=392 \Leftrightarrow 7^x+7^x\cdot 7=392 \Leftrightarrow 7^x(1+7)=392 \Leftrightarrow 7^x\cdot 8=392 \Leftrightarrow 7^x=49 \Leftrightarrow 7^x=7^2 \Leftrightarrow x=2$. $\square$

13. $3^x+3^{x+1}=36 \Leftrightarrow 3^x+3^x\cdot 3=36 \Leftrightarrow 3^x(1+3)=36 \Leftrightarrow 3^x=9 \Leftrightarrow x=2$. $\square$

14. $2-3^{x^2-1}=1 \Leftrightarrow 3^{x^2-1}=1 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x \in \{-1,1\}$. $\square$

15. $3^{1-x^2}=\dfrac{1}{27} \Leftrightarrow 3^{1-x^2}=3^{-3} \Leftrightarrow 1-x^2=-3 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x \in \{-2,2\}$. $\square$

16. Fie G_f graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^{x+1}-1$. Avem $f(x)=0 \Leftrightarrow 2^{x+1}-1=0 \Leftrightarrow 2^{x+1}=1 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$. Deci G_f intersectează axa Ox în punctul $(-1,0)$. Din $f(0)=2^1-1=1$ rezultă că G_f intersectează axa Oy în punctul $(0,1)$. $\square$

17. $g(1)=2^1-1=1$ şi $f(g(1))=f(1)=\log_2 2=1$. $\square$

18. $\log_6 3+\log_6 12=\log_6(3\cdot 12)=\log_6 36=2$. $\square$

19. $\log_7\left(3+\sqrt{2}\right)+\log_7\left(3-\sqrt{2}\right)=\log_7\left[\left(3+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)\right]=\log_7(3^2-2)=1$. $\square$

20. $\log_2\left(3+\sqrt{5}\right)+\log_2\left(3-\sqrt{5}\right)=\log_2\left[\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)\right]=\log_2(3^2-5)=2$. $\square$

21. $\log_2\dfrac{1}{8}+\sqrt[3]{27}=\log_2 2^{-3}+3=-3\log_2 2+3=-3+3=0$. $\square$

22. $\log_3 6=\log_3(3\cdot 2)=\log_3 3+\log_3 2=1+a$. $\square$

23. $\log_2(2x+1) = \log_2 5 \Leftrightarrow 2x+1 = 5 \Leftrightarrow x = 2$. $\square$

24. $\log_7\left(x^2+8\right) = \log_7(6x) \Leftrightarrow x^2+8 = 6x \Leftrightarrow x^2-6x+8 = 0 \Leftrightarrow x \in \{2, 4\}$. $\square$

25. $\log_3\left(x^2+1\right) = \log_3 1 \Leftrightarrow x^2+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$. $\square$

26. Condițiile $x+1>0$ şi $x+3>0$ conduc la $x \in (-1, +\infty)$. Pentru $x \in (-1, +\infty)$, avem: $\log_2(x+1) - \log_2(x+3) = -1 \Leftrightarrow \log_2\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right) = -1 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x+3} = 2^{-1} \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x+3} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$ $2x+2 = x+3 \Leftrightarrow x = 1$, iar $1 \in (-1, +\infty)$. $\square$

27. Pentru $x \in (4, +\infty)$, avem: $\log_3(x+2) - \log_3(x-4) = 1 \Leftrightarrow \log_3\left(\dfrac{x+2}{x-4}\right) = 1 \Leftrightarrow$ $\dfrac{x+2}{x-4} = 3 \Leftrightarrow x+2 = 3x-12 \Leftrightarrow x = 7 \in (4, +\infty)$. $\square$

28. Pentru $x \in (0, +\infty)$, ecuația $\log_2(x+3) - \log_2 x = 2$ devine $\log_2\left(\dfrac{x+3}{x}\right) = 2$, sau $\dfrac{x+3}{x} = 2^2$, cu soluția $x = 1 \in (0, +\infty)$. $\square$

29. $C_4^2 = \dfrac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ şi $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$, deci $5\,C_4^2 - A_5^2 = 5 \cdot 6 - 20 = 10$. $\square$

30. $C_4^2 = 6\,;\ A_4^1 = 4$. Deci $2\,C_4^2 - 3\,A_4^1 = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 0$. $\square$

31. $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120\,;\ C_5^2 = \dfrac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10\,;\ A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$. Deci, $\dfrac{P_5}{C_5^2 + A_6^2} = \dfrac{120}{10+30} = 3$. $\square$

32. $C_6^2 = \dfrac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15\,;\ A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12\,;\ C_6^2 - A_4^2 = 15 - 12 = 3$. $\square$

33. Pentru $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$, iar $A_n^1 = n$. Deci, $C_n^2 = 4A_n^1 \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)}{2} = 4n \Leftrightarrow$ $n-1 = 8 \Leftrightarrow n = 9$. $\square$

34. Sunt 3 posibilități pentru cifra sutelor (aceasta nu poate fi 0), 3 posibilități pentru cifra zecilor şi 2 posibilități pentru cifra unităților. Rezultă că se pot forma $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ numere naturale de 3 cifre distincte, cu elementele mulțimii $M = \{0, 1, 2, 3\}$. $\square$

35. Cu elementele mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$ se pot forma $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ numere de 3 cifre distincte. $\square$

36. O mulțime cu n elemente are C_n^k submulțimi de k elemente. Fie n numărul elementelor mulțimii. Din $C_n^2 = 10$ rezultă $\dfrac{n(n-1)}{2} = 10$, sau $n^2 - n - 20 = 0$, cu soluția pozitivă $n = 5$. $\square$

37. O mulțime cu n elemente are A_n^k submulțimi ordonate cu k elemente. Pentru $n = 7$ şi $k = 2$ obținem $A_7^2 = 7 \cdot 6 = 42$ submulțimi. $\square$

38. Numerele divizibile cu 7 din mulțimea $\{1, 2, 3, \ldots, 30\}$ sunt: $7, 14, 21, 28$, deci sunt 4 cazuri favorabile, iar numărul cazurilor posibile este 30. Deci, probabilitatea cerută este $P = \dfrac{4}{30} = \dfrac{2}{15}$. $\square$

39. Numerele divizibile cu 4 din mulțimea $\{10, 11, 12, \ldots, 99\}$ sunt de forma $4k$, unde $10 \le 4k \le 99$ şi $k \in \mathbb{N}$. Rezultă $3 \le k \le 24$, adică sunt 22 de cazuri favorabile. Cazuri posibile sunt 90, deci $P = \dfrac{22}{90} = \dfrac{11}{45}$. $\square$

40. Inegalitatea $2^n \ge n^2$ este adevărată pentru $n \in \{1, 2, 4\}$ şi falsă pentru $n = 3$. Sunt 3 cazuri favorabile şi 4 cazuri posibile, deci $P = \dfrac{3}{4}$. $\square$

41. Sunt 90 de numere naturale de două cifre. Dintre acestea, 9 sunt divizibile cu 10. Deci, $P = \dfrac{9}{90} = \dfrac{1}{10}$. $\square$

42. Sunt 10 numere naturale de o cifră, dintre care 4 sunt mai mici sau egale cu 3. Rezultă $P = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$. $\square$

43. Din cele 10 numere naturale de o cifră, 3 sunt divizori ai lui 10. Aşadar, $P = \dfrac{3}{10}$. $\square$

44. Dacă x este valoarea veniturilor anuale, atunci $\dfrac{4}{100} \cdot x = 100000$, sau $\dfrac{x}{25} = 100000$, de unde $x = 2500000$ de lei. $\square$

45. Notăm cu x prețul obiectului înainte de scumpire. După scumpirea cu 30%, prețul devine $x + \dfrac{30}{100} \cdot x = 325$. Rezultă $\dfrac{13}{10} \cdot x = 325$, de unde $x = 250$ de lei. $\square$

46. 100 lei +10 lei = 110 lei. $\square$

47. 100 lei + 20 lei = 120 lei. $\square$

48. În urma ieftinirii cu 10%, prețul obiectului a scăzut cu $\dfrac{10}{100} \cdot 1000 = 100$ lei. Prețul după ieftinire va fi 1000 lei − 100 lei = 900 lei. $\square$

49. 100 lei − 30 lei = 70 lei. $\square$

50. Dobânda obținută după un an este $D = 1008\,\text{lei} - 900\,\text{lei} = 108$ lei. Din $900 \cdot \dfrac{p}{100} = 108$ rezultă $p = 12$. $\square$

51. Fie x prețul produsului înainte de scumpire. Atunci $\dfrac{5}{100} \cdot x = 12$, deci $x = 240$ lei. $\square$

52. Din $a = \dfrac{25}{100} \cdot b$ rezultă $b = 4a$ şi din $a + b = 150$ obținem $5a = 150$. Deci $a = 30$ şi $b = 120$. $\square$

11 Geometrie și trigonometrie. Soluții

1. Din teorema lui Pitagora obținem $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 10^2 - 6^2 = 64$, deci $AC = 8$. Aria triunghiului ABC este $\mathcal{S}_{ABC} = \dfrac{AB \cdot AC}{2} = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24$. $\square$

2. Avem:
$$\mathrm{m}(\sphericalangle ABD) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{m}(\sphericalangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ;$$
De asemenea,
$$\mathrm{m}(\sphericalangle ADB) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{m}(\sphericalangle ADC) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{m}(\sphericalangle ABC) = 60^\circ.$$
Pentru că are două unghiuri de 60°, triunghiul ABD este echilateral. Deci $BD = 4$. $\square$

3. $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$.
Lungimea înălțimii din A este $h_A = \dfrac{AB \cdot AC}{BC} = \dfrac{3 \cdot 4}{5} = \dfrac{12}{5}$. $\square$

4. Aria unui triunghi echilateral de latură l este $\mathcal{S} = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$. Din egalitatea $\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$ rezultă $l = 4$. $\square$

5. Distanța dintre punctele $M(x_1, y_1)$ și $N(x_2, y_2)$ este $MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Rezultă
$$AB = \sqrt{(3-2)^2 + (5-5)^2} = 1.$$ $\square$

6. Folosind formula distanței dintre două puncte, obținem:
$$\begin{aligned} y_A = y_B = 6 &\Rightarrow AB = |x_B - x_A| = |2 - 5| = 3;\\ x_A = x_C = 5 &\Rightarrow AC = |y_C - y_A| = |2 - 6| = 4;\\ BC &= \sqrt{(5-2)^2 + (2-6)^2} = 5. \end{aligned}$$
Deoarece $AB^2 + AC^2 = 9 + 16 = 25 = BC^2$, din reciproca teoremei lui Pitagora rezultă că triunghiul ABC este dreptunghic în A. $\square$

7. $AB = BC = 3$. $\square$

8. Ecuația dreptei AB, unde $A(x_1, y_1)$ și $B(x_2, y_2)$, $A \neq B$, este $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Pentru $A(1, 3)$ și $B(-1, 1)$ obținem $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, echivalentă cu $x - y + 2 = 0$. $\square$

9. Ecuația dreptei AB este $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, echivalentă cu $x - y + 1 = 0$. $\square$

10. Mediatoarea segmentului $[AB]$ este dreapta d care trece prin mijlocul $M(x_M, y_M)$ al segmentului $[AB]$ și este perpendiculară pe AB. Coordonatele punctului M sunt:
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + 5}{2} = 3;$$
$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4 + 0}{2} = 2.$$

Panta dreptei AB este $m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-4}{5-1} = -1$. Notăm cu m_d panta dreptei d. Din $d \perp AB$ rezultă $m_{AB} \cdot m_d = -1$, deci $m_d = 1$. Ecuația dreptei d va fi $y - y_M = m_d(x - x_M)$, adică $y = x - 1$. □

11. Avem:

$$x_R = \frac{x_P + x_Q}{2} \Rightarrow 3 = \frac{1 + x_Q}{2} \Rightarrow x_Q = 5\,;$$
$$y_R = \frac{y_P + y_Q}{2} \Rightarrow 3 = \frac{3 + y_Q}{2} \Rightarrow y_Q = 3.$$ □

12. $AB = \sqrt{(1-1)^2 + (3-1)^2} = 2$. □

13. $AB = \sqrt{(3-1)^2 + (1-1)^2} = 2$. □

14. Fie $M(x_M, y_M)$ mijlocul segmentului $[PR]$. Avem $x_M = \dfrac{2+2}{2} = 2$ și $y_M = \dfrac{1+3}{2} = 2$. □

15. $AB = \sqrt{(2-2)^2 + (1-4)^2} = 3$. □

16. Mijlocul M al segmentului $[AB]$ are coordonatele $x_M = \dfrac{5+3}{2} = 4$ și $y_M = \dfrac{1+5}{2} = 3$. Lungimea medianei $[OM]$ este $OM = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. □

17. $O(0,0)$ este mijlocul segmentului (AB), deci $0 = \dfrac{4 + x_B}{2}$ și $0 = \dfrac{-1 + y_B}{2}$. Rezultă $x_B = -4$ și $y_B = 1$. □

18. Mijlocul M al segmentului (AB) are coordonatele $x_M = \dfrac{2+6}{2} = 4$, $y_M = \dfrac{-2+8}{2} = 3$. Distanța de la O la M este $OM = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. □

19. $x_B = 4$, $y_B = 6$. □

20. Fie $C(x_C, y_C)$ simetricul punctului A față de B. Deoarece B este mijlocul segmentului $[AC]$, rezultă $3 = \dfrac{1 + x_C}{2}$ și $0 = \dfrac{2 + y_C}{2}$. Obținem $x_C = 5$ și $y_C = -2$. □

21. Coordonatele punctului de intersecție a celor două drepte sunt date de soluția sistemului $\begin{cases} 2x - y - 6 = 0 \\ -x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$. Din a doua ecuație a sisistemului obținem $x = 2y - 6$ și, înlocuind în prima ecuație, rezultă $2(2y-6) - y - 6 = 0$. De aici, $y = 6$, iar $x = 2 \cdot 6 - 6 = 6$. Distanța de la punctul $A(2,3)$ la punctul $(6,6)$ este $\sqrt{(6-2)^2 + (6-3)^2} = 5$. □

22. Avem $AB^2 = 16 + (m+2)^2$ și din egalitatea $16 + (m+2)^2 = 25$ obținem $(m+2)^2 = 9$. Deci, $m + 2 = \pm 3$ și $m \in \{-5, 1\}$. □

23. Punctele A, B, C sunt coliniare dacă $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ m+1 & m^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Obținem ecuația $m^2 - m - 2 = 0$, cu soluțiile $m_1 = -1$ și $m_2 = 2$. □

24. Coordonatele mijlocului M al segmentului (AB) sunt $x_M = \dfrac{-6+2}{2} = -2$ și $y_M = \dfrac{3+5}{2} = 4$. □

25. **a)** Punctul A_1 are coordonatele $(0,3)$, iar A_2 are coordonatele $(1,4)$. Ecuația dreptei A_1A_2 este

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - y + 3 = 0.$$

b) Coordonatele punctelor A_n verifică ecuația dreptei A_1A_2, pentru orice număr $n \in \mathbb{N}^*$. Într-adevăr, $(n-1) - (n+2) + 3 = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Deci $A_m, A_n, A_p \in A_1A_2$.
c) $M_{2011} = \{n \in \mathbb{N}^* / A_nA_{2011} \le 2\}$. Punctul A_{2011} are coordonatele $(2010, 2013)$, deci $A_nA_{2011} = \sqrt{(2010-n+1)^2 + (2013-n-2)^2} = \sqrt{2(2011-n)^2} = \sqrt{2} \cdot |2011-n|$. Condiția $A_nA_{2011} \le 2$ devine $\sqrt{2} \cdot |2011-n| \le 2$, sau $|2011-n| \le \sqrt{2}$. Ținând seamă că $1 < \sqrt{2} < 2$ și că numărul $|2011-n|$ este natural, avem următoarele posibilități:

- $|2011-n| = 0$, de unde $n = 2011$;
- $|2011-n| = 1 \Leftrightarrow 2011 - n = \pm 1 \Leftrightarrow n \in \{2010, 2012\}$.

Rezultă $M_{2011} = \{2010, 2011, 2012\}$. □

26. **a)** Avem $A_0(1,1)$ și $A_1(2,3)$, deci ecuația dreptei A_0A_1 este

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0.$$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2^2 & 3^2 & 1 \\ 2^3 & 3^3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 2 = 12 \neq 0$. Rezultă că punctele A_1, A_2, A_3 nu sunt coliniare.
c) Aria triunghiului $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ este $\mathcal{S} = \dfrac{1}{2} \cdot |\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 2^n & 3^n & 1 \\ 2^{n+1} & 3^{n+1} & 1 \\ 2^{n+2} & 3^{n+2} & 1 \end{vmatrix}$. Pentru calcularea determinantului Δ vom da factor comun 2^n pe prima coloană și 3^n pe a doua coloană. Obținem $\Delta = 2^n \cdot 3^n \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 6^n \cdot 2$. Rezultă $\mathcal{S} = 6^n$, iar din egalitatea $6^n = 216$ obținem $n = 3$. □

27. $\operatorname{tg}^2 60° + \operatorname{tg}^2 45° = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 = 4$. □

28. $\sqrt{3}\cos 30° + \sqrt{2}\sin 45° = \sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{2}{2} = \dfrac{5}{2}$. □

29. Ținând seamă că $\sin 170° = \sin(180° - 170°) = \sin 10°$, obținem

$$\sin 10° + \sin 30° - \sin 170° = \sin 10° + \sin 30° - \sin 10° = \sin 30° = \frac{1}{2}.$$ □

30. $\cos 45° + \cos 135° = \cos 45° - \cos(180° - 135°) = \cos 45° - \cos 45° = 0$. □

31. $\cos 30° + \cos 150° = \cos 30° - \cos(180° - 150°) = \cos 30° - \cos 30° = 0$. □

32. $\cos 40° + \cos 140° = \cos 40° - \cos(180° - 140°) = \cos 40° - \cos 40° = 0$. □

33. $\cos 130° + \cos 50° = -\cos(180° - 130°) + \cos 50° = -\cos 50° + \cos 50° = 0$. □

34. $\sin^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$. □

35. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

Pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos x > 0$. Deci, $\cos x = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. □

36. $\cos^2 B = 1 - \sin^2 B = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$. Deoarece unghiul B este ascuțit, $\cos B > 0$. Rezultă $\cos B = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$. □

37. $A = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ$. Deci, $\cos A = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. □

38. $\frac{\sin x + 4\cos x}{\cos x} = 5 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + 4 \cdot \frac{\cos x}{\cos x} = 5 \Leftrightarrow \mathrm{tg} x + 4 = 5 \Leftrightarrow \mathrm{tg} x = 1$. Deci $x = 45^\circ$. □

39. Vom folosi teorema sinusurilor:

$$\frac{MN}{\sin P} = \frac{MP}{\sin N} = \frac{PN}{\sin M} = 2R,$$

unde R este raza cercului circumscris triunghiului MNP. Din primele două rapoarte rezultă:

$$MN = MP \cdot \frac{\sin P}{\sin N} = 6 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3} = 8.$$ □

40. Aria triunghiului MNP este $\mathcal{S} = \frac{MN \cdot NP \cdot \sin N}{2}$. În urma înlocuirilor rezultă $\sin N = \frac{1}{2}$. □

41. Conform teoremei cosinusului, avem:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

Rezultă $BC^2 = 36 + 25 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 31$. Deci $BC = \sqrt{31}$. □

42. Din teorema cosinusului rezultă

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{12}{12 \cdot 5} = \frac{1}{5}.$$ □

43. Din teorema cosinusului rezultă

$$\cos M = \frac{MN^2 + MP^2 - NP^2}{2 \cdot MN \cdot MP} = \frac{16 + 25 - 36}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{8}.$$ □

44. Fie R raza cercului circumscris triunghiului ABC. Din teorema sinusurilor rezultă

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{9}{2\sin 120^\circ} = \frac{9}{2\sin 60^\circ} = \frac{9}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}.$$ □

45. Avem $\cos M = \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\dfrac{1}{2}$. Latura NP se poate calcula folosind teorema cosinusului:

$$NP^2 = MN^2 + MP^2 - 2 \cdot MN \cdot MP \cdot \cos M = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 19.$$

Deci $NP = \sqrt{19}$, iar perimetrul triunghiului MNP este

$$\mathcal{P} = MN + MP + NP = 5 + \sqrt{19}. \qquad \square$$

46. Din teorema sinusurilor rezultă

$$\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{AB}{2\sin C} = \frac{6}{2\sin 30^\circ} = 6. \qquad \square$$

47. Dacă $\overline{i}$ este versorul axei Ox, iar $\overline{j}$ este versorul axei Oy, atunci:

$$\overline{OM} + \overline{ON} = (2\overline{i} - \overline{j}) + (-\overline{i} + 3\overline{j}) = \overline{i} + 2\overline{j}.$$

Deci, coordonatele vectorului $\overline{OM} + \overline{ON}$ sunt $(1, 2)$. $\square$

48. Condiția de coliniaritate a vectorilor $\overline{v}_1$ și $\overline{v}_2$ este $\dfrac{2}{a+3} = \dfrac{a}{2}$. Rezultă ecuația $a^2 + 3a - 4 = 0$, cu soluția pozitivă $a = 1$. $\square$

49. $\overline{w} = 2\overline{v}_1 - \overline{v}_2 = 2(2\overline{i} - \overline{j}) - (\overline{i} + 3\overline{j}) = 4\overline{i} - 2\overline{j} - \overline{i} - 3\overline{j} = 3\overline{i} - 5\overline{j}$. Coordonatele vectorului $\overline{w}$ sunt $(3, -5)$. $\square$

50. Avem $\overline{OA} = 2\overline{i}$ și $\overline{OB} = \overline{i} - \overline{j}$. Rezultă $\overline{OC} = 2\overline{OA} + \overline{OB} = 2 \cdot 2\overline{i} + (\overline{i} - \overline{j}) = 5\overline{i} - \overline{j}$. Coordonatele punctului C sunt $(5, -1)$. $\square$

12 Matrice și determinanți. Sisteme liniare. Soluții

1. **a)** $\det A = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 8 \cdot 1 = 0.$

b) $B + C = A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & x \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2+x \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Obținem $2 + x = 8$, deci $x = 6$.

c) Elementele matricei $B \cdot B$ sunt:

$$x_{11} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = -1\,; \qquad x_{12} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) = -2\,;$$
$$x_{21} = (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) = 1\,; \quad x_{22} = (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) = 2.$$

Deci $B \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -B$, de unde rezultă $B \cdot B + B = O_2$. □

2. **a)** $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 1 \cdot (-5) = -6 + 5 = -1.$

b) Efectuând înmulțirile se constată că $A \cdot B = B \cdot A = I_2$.
Rezultă $2A \cdot B - B \cdot A = 2I_2 - I_2 = I_2$.

c) Avem:

$$A \cdot A - xA = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3x & x \\ -5x & -2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 3x & 1 - x \\ -5 + 5x & -1 + 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rezultă $x = 1$. □

3. **a)** $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 4 - 4 = 0.$

b) Elementele matricei $A \cdot A$ sunt:

$$x_{11} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5\,; \quad x_{12} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 10\,;$$
$$x_{21} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 10\,; \quad x_{22} = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 20.$$

Deci $A \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 5A.$

c) $\begin{pmatrix} x & y \\ y & -3 \end{pmatrix} = I_2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$. Rezultă $x = 0, y = -2$. □

4. **a)** Folosind regula triunghiului pentru calcularea determinantului de ordinul 3, obținem:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 9 + 1 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 9 = 2.$$

b) $A + mI_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+m & 1 & 1 \\ 1 & 2+m & 3 \\ 1 & 4 & 9+m \end{pmatrix}.$

Din egalitatea

$$\begin{pmatrix} 1+m & 1 & 1 \\ 1 & 2+m & 3 \\ 1 & 4 & 9+m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

obținem $m = -1$.

c)

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ x + 4y + 9z = 3 \end{cases}.$$

Necunoscuta x se reduce dacă scădem, membru cu membru, din a II-a ecuație prima ecuație, iar din a III-a ecuație scădem a II-a ecuație. Se obține sistemul $\begin{cases} y + 2z = 1 \\ y + 3z = 1 \end{cases}$, cu soluția $y = 1, z = 0$. Înlocuind $y = 1$ și $z = 0$ în ecuația $x + y + z = 0$ rezultă $x = -1$.

Deci $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. □

5. **a)** $\det A = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-2) - 1 \cdot 2 = 4$.

b) Avem:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rezultă $B \cdot A - A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Deoarece $A + xB = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1+x \\ 2+x & -2 \end{pmatrix}$, rezultă

$$\det(A + xB) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -3 & 1+x \\ 2+x & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-4, 1\}.$$ □

6. **a)** Se constată că $M(a) + M(-a) = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2a & 0 \\ 0 & -2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M(0)$, pentru orice număr real a. Egalitatea cerută se obține pentru $a = \frac{1}{2}$.

b) $\det(M(a)) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

c) Din $M(-2) + M(2) = M(1) + M(-1) = M(0)$, rezultă

$$M(-2) + M(-1) + M(0) + M(1) + M(2) = 3M(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ □

7. **a)** $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 = 1$.

b) Pentru $x = 0$, $A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

c) $\det(A + B) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1+x & -2 \\ 0 & 1+x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1+x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. □

8. **a)** $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1.$

b) $A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Rezultă:

$$A \cdot A - xI_2 = A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ultima egalitate are loc numai dacă $\begin{cases} 2 - x = 1 \\ 1 - x = 0 \end{cases}$, de unde $x = 1$.

c) $M + A = \begin{pmatrix} m & m \\ m & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+1 & m+1 \\ m+1 & 1 \end{pmatrix}$. Prin urmare,

$$\det(M + A) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} m+1 & m+1 \\ m+1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (m+1) - (m+1)^2 = 0.$$

Ultima ecuație este echivalentă cu $m(m+1) = 0$, de unde $m_1 = 0$, $m_2 = -1$. Deci matricele cerute sunt $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. □

9. **a)** $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-2) \cdot 0 = 4.$

b) $A \cdot B = 2I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2b & 2-2b \\ 0 & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Deci b trebuie să verifice ecuațiile $\begin{cases} 2b = 2 \\ 2 - 2b = 0 \end{cases}$, de unde $b = 1$.

c) $\det(A + B) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2+b & -1 \\ 0 & 2+b \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2+b)^2 = 0 \Leftrightarrow b = -2.$ □

10. **a)** Avem $\Delta(1) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. Prin adunarea elementelor primei coloane la elementele coloanei a doua obținem $\Delta(1) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, deoarece coloanele a II-a și a III-a sunt identice.

b) $\Delta(x) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & x \\ 2 & -1 & x \\ x & x & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2x^2 + 2x^2 + x^2 + x^2 - 8 = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1).$

c) Pentru că $\Delta(0) = -6 \neq 0$, matricea $A(0)$ este inversabilă, iar $(A(0))^{-1} = \dfrac{1}{\Delta(0)} \cdot A^*$, unde A^* este adjuncta matricei $A(0)$. Elementul A_{ij}, unde $i, j \in \{1, 2, 3\}$, al matricei A^* este complementul algebric al elementului corespunzător din matricea transpusă matricei $A(0)$. Transpusa matricei $A(0)$ este

$$^{t}A(0) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Avem:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$
$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$
$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Deci $A^* = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, iar $(A(0))^{-1} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. □

11. **a)** $\det H(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$

b) Avem $H(x) \cdot H(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln a + \ln x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, deci $H(x) \cdot H(a) = H(x), \forall x > 0 \Leftrightarrow \ln a + \ln x = \ln x, \forall x > 0 \Leftrightarrow \ln a = 0 \Leftrightarrow a = 1.$

c) Avem:

$$H(1) + H(2) + \ldots + H(2012) =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln 2012 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2012 & 0 & 0 \\ 0 & 2012 & \ln(2012!) \\ 0 & 0 & 2012 \end{pmatrix}.$$

Determinantul ultimei matrice este egal cu 2012^3. □

12. **a)** Matricea asociată sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$. Determinantul acestei matrice este $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -a - 2 + 1 - 2 - 1 - a = -2a - 4.$

b) Matricea A este inversabilă numai dacă $\det A \neq 0$, adică $-2a - 4 \neq 0$. Obținem $a \neq -2$, deci $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

c) Pentru $a = 0$ sistemul devine $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - y + z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ și are soluție unică. Prin scăderea, membru cu membru, a primei ecuații din a III-a obținem $2z = 2$, deci $z = 1$. Pentru $z = 1$, a doua ecuație devine $x - y = 0$. ținând seamă că $x + y = 2$, rezultă $x = 1, y = 1$. Soluția sistemului este: $x = 1, y = 1, z = 1$. □

13. **a)** Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} m & -2 & 1 \\ 2 & -m & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Suma elementelor de pe diagonala principală a matricei A este $m - m + 2 = 2$.

b) $\det A = \begin{vmatrix} m & -2 & 1 \\ 2 & -m & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2m^2 - 2 + 6 + m - 3m + 8 = -2m^2 - 2m + 12.$

$$\det A = 0 \Leftrightarrow -2m^2 - 2m + 12 = 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow m \in \{-3, 2\}.$$

Deci $\det A \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$.

c) Pentru $m = 1$ sistemul devine $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - y - 3z = 3 \\ x - y + 2z = 4 \end{cases}$, iar matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Pentru că $d = \det A = -2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 12 = 8 \neq 0$, sistemul este de tip Cramer și are soluție unică. Pentru rezolvarea sistemului vom folosi formulele lui Cramer:

$$x_1 = \frac{d_1}{d},\ y_1 = \frac{d_2}{d},\ z_1 = \frac{d_3}{d},$$

unde $d = \det A = 8$, iar d_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, este determinantul matricei care se obține din matricea A, prin înlocuirea coloanei i cu coloana termenilor liberi ai sistemului. Avem:

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix};\quad d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix};\quad d_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Folosind regula triunghiului pentru calcularea determinanților de ordinul trei, obținem:

$$d_1 = -2 - 3 + 24 + 4 - 3 + 12 = 32;$$
$$d_2 = 6 + 8 - 3 - 3 + 12 - 4 = 16;$$
$$d_3 = -4 - 2 - 6 + 1 + 3 + 16 = 8.$$

Rezultă $x_1 = 4, y_1 = 2, z_1 = 1$, iar $y_1^2 = 4 = x_1 \cdot z_1$. □

14. **a)** Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 3 \\ 4 & a^2 & 9 \end{pmatrix}$. Determinantul acestei matrice este

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 3 \\ 4 & a^2 & 9 \end{vmatrix} = 9a + 2a^2 + 12 - 4a - 3a^2 - 18 = -a^2 + 5a - 6.$$

b) Matricea A este inversabilă dacă și numai dacă $\det A \neq 0$, adică $-a^2 + 5a - 6 \neq 0$. Ecuația $-a^2 + 5a - 6 = 0$ are soluțiile $a_1 = 2$ și $a_2 = 3$. Rezultă A inversabilă pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$.

c) Pentru $a = 1$ sistemul devine $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 4x + y + 9z = 1 \end{cases}$. Prin scăderea primei ecuații din a doua, respectiv prin scăderea celei de a doua ecuații din a treia, obținem $\begin{cases} x + 2z = 0 \\ 2x + 6z = 0 \end{cases}$.
Rezultă $x = 0, z = 0$, iar din ecuația $x + y + z = 1$ rezultă $y = 1$. Soluția sistemului este $x = 0, y = 1, z = 0$. □

15. **a)** Avem:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 3A.$$

Rezultă $A^2 - 3A = O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Folosind proprietăți ale operațiilor cu matrice și relația $A^2 = 3A$, deducem:

$$X(a) \cdot X(b) = (I_2 + aA)(I_2 + bA) = I_2^2 + bI_2A + aAI_2 + abA^2 =$$
$$= I_2 + aA + bA + 3abA = I_2 + (a + b + 3ab)A = X(a + b + 3ab).$$

c) $X(a) = I_2 + aA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & -a \\ -2a & 1+2a \end{pmatrix}$. Determinantul acestei matrice este $\det(X(a)) = (1+a)(1+2a) - 2a^2 = 1 + 3a$. Cum $1 + 3a = 0 \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$, rezultă $1 + 3a \neq 0, \forall x \in \mathbb{Z}$. Prin urmare, $X(a)$ este matrice inversabilă pentru orice număr întreg a. □

16. **a)** $\det A = \begin{vmatrix} m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = m^2 - 2 + 1 - m - 2m + 1 = m^2 - 3m.$

b) Tripletul $(-1, 2, 5)$ este soluție a sistemului dacă sunt verificate egalitățile:

$$\begin{cases} m \cdot (-1) - 2 + 5 = 0 \\ -1 + m \cdot 2 - 5 = 0 \\ -1 - 2 \cdot 2 + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

c) Sistemul admite soluția $(0, 0, 0)$ pentru orice număr real m. Această soluție este unica soluție a sistemului numai dacă $\det A \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m \neq 0 \Leftrightarrow m(m - 3) \neq 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$. □

17. **a)** $D(-1, 1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 1 + 1 - 0 - 2 = -2.$

b) $D(x, 2010) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 2010 \\ 1 & x+1 & 2011 \end{vmatrix} = 2011x + (x+1) + 2010 - x - 2010(x+1) - 2011 = x - 2010$. Ecuația $x - 2010 = 1$ are soluția $x = 2011 \in \mathbb{Z}$.

c) $D(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x+1 & y+1 \end{vmatrix} = x(y+1) + (x+1) + y - x - (x+1)y - (y+1) = x - y.$

Înlocuind y cu $-y$ în egalitatea $D(x, y) = x - y$, obținem $D(x, -y) = x - (-y) = x + y$. Din aceeași egalitate, înlocuind x cu x^2 și y cu y^2, obținem $D(x^2, y^2) = x^2 - y^2$. Rezultă $D(x, y) \cdot D(x, -y) = (x - y)(x + y) = x^2 - y^2 = D(x^2, y^2), \forall x, y \in \mathbb{Z}$. □

18. **a)** $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 1.$

b) Avem:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ 2A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};\ I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rezultă
$$A^2 - 2A + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Fie $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, cu proprietatea $X^2 = A$. Avem:
$$X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}.$$

Egalitatea
$$\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
este echivalentă cu următoarele patru condiții:
$$\begin{cases} a^2+bc = 1 & (1) \\ bc+d^2 = 1 & (2) \end{cases} ; \quad \begin{cases} ab+bd = 2 & (3) \\ ac+cd = 0 & (4) \end{cases} .$$

Din (3) rezultă $b(a+d) = 2$, deci $a+d \neq 0$. Din (4) rezultă $c(a+d) = 0$. De aici deducem $c = 0$, deoarece $a+d \neq 0$. Înlocuind $c = 0$ în (1) și (2) rezultă $a^2 = 1$ și $d^2 = 1$, deci $a^2 - d^2 = (a-d)(a+d) = 0$. Cum $a+d \neq 0$, avem $a = d$. Înlocuind d cu a în (3), obținem $ab = 1$. Din $a^2 = 1$ găsim $a = \pm 1$.
Pentru $a = 1$, rezultă $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$.
Pentru $a = -1$, rezultă $b = -1$, $c = 0$, $d = -1$.
Prin urmare,
$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \; X_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
□

19. **a)** $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+0+0-0-0-0 = 1.$

b) Deoarece $\det A = 1 \neq 0$, rezultă A matrice inversabilă. Efectuând înmulțirile, obținem $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_3$. Deci A^{-1} este inversa matricei A.

c) Notăm $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Ecuația $A \cdot X = C$ este echivalentă cu $X = A^{-1} \cdot C$. Obținem
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
□

20. **a)** $\det A = \begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^2 + 0 + 1 - 0 - m - m = m^2 - 2m + 1.$

b) Pentru $m = 0$, sistemul devine $\begin{cases} y = -1 \\ x+y+z = 3 \\ x+y = 0 \end{cases}$. Înlocuind $y = -1$ în a treia ecuație, rezultă $x = 1$. Din a doua ecuație obținem $1 - 1 + z = 3$, deci $z = 3$. Soluția sistemului este: $x = 1$, $y = -1$, $z = 3$.

c) Pentru $m = 1$ sistemul devine $\begin{cases} x+y = -1 \\ x+y+z = 3 \\ x+y+z = 0 \end{cases}$. Din a doua și a treia ecuație rezultă $3 = 0$, ceea ce este absurd. Sistemul este incompatibil. □

21. **a)** $A^2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\det A = -1 \neq 0$, deci A este matrice inversabilă. Din $A^2 - A = I_2$ rezultă $A(A - I_2) = I_2$. De asemenea, $(A - I_2)A = A^2 - A = I_2$. Prin urmare,

$$A^{-1} = A - I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Prin înmulțirea ecuației la stânga cu A^{-1}, obținem

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2010 & 2010 \\ 2009 & 2010 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2009 & 2010 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$ □

22. **a)** $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ m & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 0 + m + 3m + 2 + 0 = 4m + 8.$

b) Condiția ca matricea A să fie inversabilă este $\det A \neq 0$, adică $4m + 8 \neq 0$. Rezultă $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

c) Pentru $m = -1$, sistemul devine $\begin{cases} x - y - z = -2 \\ x + 3y - z = -2 \\ -x + 2z = 4 \end{cases}$. În acest caz, $\det A = 4 \neq 0$, deci sistemul are soluție unică. Prin scăderea, membru cu membru, a primelor două ecuații obținem $y = 0$. Pentru $y = 0$, prima ecuație devine $x - z = -2$. Prin adunarea, membru cu membru, a acestei ecuații cu a treia ecuație a sistemului, rezultă $z = 2$. Înlocuind $z = 2$ în $-x + 2z = 4$, găsim $x = 0$.
Soluția sistemului este $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$. □

13 Legi de compoziție. Soluții

1. **a)** $0 \circ (-4) = 0 \cdot (-4) + 4 \cdot 0 + 4 \cdot (-4) + 12 = -16 + 12 = 4$.
b) $(x+4)(y+4) - 4 = xy + 4x + 4y + 16 - 4 = xy + 4x + 4y + 12 = x \circ y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
c) $x \circ x = 12 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4x + 12 = 12 \Leftrightarrow x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x \in \{-8, 0\}$. □

2. **a)** $1 * 2 = 2(1 + 2 - 1) - 1 \cdot 2 = 4 - 2 = 2$.
b) Pentru orice număr real x, avem:

$$x * 2 = 2(x + 2 - 1) - x \cdot 2 = 2x + 2 - 2x = 2;$$
$$2 * x = 2(2 + x - 1) - 2 \cdot x = 2 + 2x - 2x = 2 = x * 2.$$

c) $x * x = x \Leftrightarrow 2(x + x - 1) - x \cdot x = x \Leftrightarrow 2(2x - 1) - x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$. Soluțiile acestei ecuații sunt $x_1 = 1$ și $x_2 = 2$. □

3. **a)** $(-1) \circ 1 = -1 + 1 + (-1) \cdot 1 = -1$.
b) $(x+1)(y+1) - 1 = xy + x + y + 1 - 1 = x + y + xy = x \circ y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
c) Ecuația $(x+1) \circ (x-3) = 4$ este echivalentă cu

$$(x+1) + (x-3) + (x+1)(x-3) = 4.$$

Efectuând calculele, obținem:

$$2x - 2 + x^2 - 3x + x - 3 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x \in \{-3, 3\}.$$ □

4. **a)** Avem:

$$2 * (-2) = 2 - 2 - 5 = -5;$$
$$2014 * (-2014) = 2014 - 2014 - 5 = -5.$$

Deci, $2 * (-2) = 2014 * (-2014) = -5$.
b) Legea de compoziție „$*$” este asociativă dacă:

$$(x * y) * z = x * (y * z),\ \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Pentru orice numere reale x, y, z, avem:

$$(x * y) * z = (x + y - 5) * z = (x + y - 5) + z - 5 = x + y + z - 10;$$
$$x * (y * z) = x * (y + z - 5) = x + (y + z - 5) - 5 = x + y + z - 10 = (x * y) * z.$$

Prin urmare, legea „$*$” este asociativă.
c) Deoarece $x * y = x + y - 5 = y + x - 5 = y * x$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, legea „$*$” este comutativă. Folosind comutativitatea și asociativitatea acestei legi de compoziție, rezultă:

$$\begin{aligned}
&(-4) * (-3) * (-2) * (-1) * 0 * 1 * 2 * 3 * 4 = \\
&= [(-4) * 4] * [(-3) * 3] * [(-2) * 2] * [(-1) * 1] * 0 = \\
&= (-5) * (-5) * (-5) * (-5) * 0 = [(-5) * (-5)] * [(-5) * (-5)] * 0 = \\
&= (-15) * (-15) * 0 = -40.
\end{aligned}$$ □

5. **a)** Pentru orice număr real x,

$$x \circ 3 = x \cdot 3 - 3(x + 3) + 12 = 3x - 3x - 9 + 12 = 3;$$
$$3 \cdot x = 3 \cdot x - 3(3 + x) + 12 = 3x - 9 - 3x + 12 = 3.$$

Prin urmare, $x \circ 3 = 3 \circ x = 3$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
b) $x \circ x = x \Leftrightarrow x \cdot x - 3(x+x) + 12 = x$. Această ecuație este echivalentă cu $x^2 - 7x + 12 = 0$, având rădăcinile $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.
c) Notăm $a = 1 \circ 2$ și $b = 4 \circ 5 \circ \ldots \circ 2014$. Folosind asociativitatea legii „$\circ$" și egalitățile de la **a)**, rezultă:

$$1 \circ 2 \circ 3 \circ 4 \circ \ldots \circ 2014 = (1 \circ 2) \circ 3 \circ (4 \circ \ldots \circ 2014) =$$
$$= a \circ 3 \circ b = (a \circ 3) \circ b = 3 \circ b = 3. \qquad \square$$

6. **a)** $2 \circ (-2) = 2 - 2 + 3 = 3$.
b) Din $x \circ (-3) = x - 3 + 3 = x$ și $(-3) \circ x = -3 + x + 3 = x$, pentru orice număr real x, rezultă că -3 este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$".
c) $2013 \circ (-2013) = x \circ x \Leftrightarrow 2013 - 2013 + 3 = x + x + 3 \Leftrightarrow x = 0$. $\square$

7. **a)** $5 * (-5) = 5 - 5 - 2 = -2$.
b) $x * y = x + y + 2 = y + x + 2 = y * x$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
c) ținând seamă că legea „$*$" este comutativă și asociativă, rezultă:

$$(-3) * (-2) * (-1) * 0 * 1 * 2 * 3 = [(-3) * 3] * [(-2) * 2] * [(-1) * 1] * 0 =$$
$$= (-2) * (-2) * (-2) * 0 = [(-2) * (-2)] * [(-2) * 0] = (-6) * (-4) = -12. \qquad \square$$

8. **a)** $x * 1 = x + 1 - 1 = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
b) Pentru orice număr real x,

$$x * x * x = (x * x) * x = (2x - 1) * x = (2x - 1) + x - 1 = 3x - 2.$$

Ecuația $x * x * x = 4$ este echivalentă cu $3x - 2 = 4$. Rezultă $x = 2$.
c) Pentru orice număr natural $n \geq 2$, avem $C_n^1 = n$ și $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Egalitatea $C_n^1 * C_n^2 = 14$ devine

$$n + \frac{n(n-1)}{2} - 1 = 14 \Leftrightarrow n^2 + n - 30 = 0.$$

Singura soluție convenabilă este $n = 5$. $\square$

9. **a)** Demonstrăm egalitatea $(x * y) * z = x * (y * z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$. Într-adevăr,

$$(x * y) * z = (xy + x + y) * z = (xy + x + y)z + (xy + x + y) + z =$$
$$= x + y + z + xy + yz + xz + xyz;$$
$$x * (y * z) = x * (y + z + yz) = x(y + z + yz) + x + (y + z + yz) =$$
$$= x + y + z + xy + yz + xz + xyz = (x * y) * z,\ \forall\, x.y, z \in \mathbb{R}.$$

b) $e \in \mathbb{R}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$" dacă $x * e = e * x = x$, pentru orice număr real x. Obținem

$$xe + x + e = ex + e + x = x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Prima egalitate este evidentă, iar a doua egalitate este echivalentă cu

$$e(x + 1) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rezultă $e = 0$.
c) Avem:

$$x^2 * 2 = x * 4 \Leftrightarrow x^2 \cdot 2 + x^2 + 2 = x \cdot 4 + x + 4 \Leftrightarrow$$
$$3x^2 + 2 = 5x + 4 \Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0.$$

Obținem soluțiile $x_1 = 2$, $x_2 = -\dfrac{1}{3}$. □

10. **a)** Pentru orice număr real x,

$$x \circ 3 = \frac{1}{2}(x \cdot 3 - x - 3 + 3) = x;$$
$$3 \circ x = \frac{1}{2}(3x - 3 - x + 3) = x.$$

Rezultă că $e = 3$ este elementul neutru al legii „$\circ$".
b) Dacă $a \in \mathbb{R}$ este simetricul elementului 2 în raport cu legea „$\circ$", atunci

$$a \circ 2 = 2 \circ a = 3.$$

Prima egalitate este evidentă. Din a doua egalitate obținem:

$$\frac{1}{2}(2a - 2 - a + 3) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a + 1) = 3 \Leftrightarrow a = 5.$$

c) H este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$\circ$" dacă

$$\forall x, y \in H \Rightarrow x \circ y \in H.$$

Fie $x, y \in H$. Atunci $x = 2m + 1, y = 2n + 1$, unde $m, n \in \mathbb{Z}$. Avem:

$$x \circ y = \frac{1}{2}[(2m + 1)(2n + 1) - (2m + 1) - (2n + 1) + 3] =$$
$$= \frac{1}{2}(4mn + 2m + 2n + 1 - 2m - 1 - 2n - 1 + 3) = \frac{1}{2}(4mn + 2) = 2mn + 1.$$

Deoarece $mn \in \mathbb{Z}$, rezultă $x \circ y \in H$. □

11. **a)** Oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$, avem:

$$2(x - 3)(y - 3) + 3 = 2(xy - 3x - 3y + 9) + 3 = 2xy - 6x - 6y + 21 = x * y.$$

b) Demonstrăm egalitatea

$$(x * y) * z = x * (y * z), \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Folosind egalitatea de la **a)**, pentru orice numere reale x, y, z, obținem:

$$(x * y) * z = [2(x - 3)(y - 3) + 3] * z =$$
$$= 2[2(x - 3)(y - 3) + 3 - 3](z - 3) + 3 = 4(x - 3)(y - 3)(z - 3) + 3;$$
$$x * (y * z) = x * [2(y - 3)(z - 3) + 3] =$$
$$= 2(x - 3)[2(y - 3)(z - 3) + 3 - 3] + 3 = 4(x - 3)(y - 3)(z - 3) + 3 = (x * y) * z.$$

c) Pentru orice numere reale a, b avem:

$$a * 3 = 2(a - 3)(3 - 3) + 3 = 3 \text{ și } 3 * b = 2(3 - 3)(b - 3) + 3 = 3.$$

Ținând seamă că legea „$*$" este asociativă, pentru $a = 1 * 2$ și $b = 4 * 5 * \ldots * 2011$, obținem:

$$1 * 2 * 3 * \ldots * 2011 = (1 * 2) * 3 * (4 * 5 * \ldots * 2011) =$$
$$= a * 3 * b = (a * 3) * b = 3 * b = 3. \qquad \square$$

12. **a)** Oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$, avem:

$$x * y = (x-3)(y-3) + 3 \Leftrightarrow x * y = xy - 3x - 3y + 9 + 3 \Leftrightarrow$$
$$x * y = xy - 3x - 3y + 12.$$

Ultima egalitate este evidentă.
b) $x * x = 19 \Leftrightarrow (x-3)(x-3) + 3 = 19 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 16 \Leftrightarrow x - 3 = \pm 4$. Rezultă $x \in \{-1, 7\}$.
c) Notăm $a = \sqrt[3]{1} * \sqrt[3]{2} * \ldots * \sqrt[3]{26}$ și $b = \sqrt[3]{28} * \sqrt[3]{29} * \ldots * \sqrt[3]{2011}$. Avem:

$$\sqrt[3]{1} * \sqrt[3]{2} * \ldots * \sqrt[3]{2011} = (\sqrt[3]{1} * \sqrt[3]{2} * \ldots * \sqrt[3]{26}) * \sqrt[3]{27} * (\sqrt[3]{28} * \ldots \sqrt[3]{2011}) =$$
$$= a * \sqrt[3]{27} * b = a * 3 * b = (a * 3) * b = 3 * b = 3. \qquad \square$$

13. **a)** Demonstrăm egalitatea:

$$(x * y) * z = x * (y * z),\ \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Într-adevăr, pentru orice numere reale x, y, z, avem:

$$(x * y) * z = [(x-4)(y-4) + 4] * z =$$
$$= [(x-4)(y-4) + 4 - 4](z-4) + 4 = (x-4)(y-4)(z-4) + 4;$$
$$x * (y * z) = x * [(y-4)(z-4) + 4] =$$
$$= (x-4)[(y-4)(z-4) + 4 - 4] + 4 = (x-4)(y-4)(z-4) + 4 = (x * y) * z.$$

b) Fie $x, y \in (4, +\infty)$. Rezultă $x - 4 > 0$ și $y - 4 > 0$. Prin urmare, $(x-4)(y-4) > 0$, de unde, prin adunarea numărului 4 în ambii membri, deducem $(x-4)(y-4) + 4 > 4$. Deci $x * y > 4$, adică $x * y \in (4, +\infty)$.
c) Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, avem $a * 4 * b = 4$. În particular, pentru $a = 1 * 2 * 3$ și $b = 5 * 6 * \ldots * 2010$, obținem $1 * 2 * 3 * \ldots * 2010 = 4$. $\square$

14. **a)** Pentru oricare $x, y \in \mathbb{R}$, avem:

$$x \circ y = 2(x-1)(y-1) + 1 \Leftrightarrow x \circ y = 2(xy - x - y + 1) + 1 \Leftrightarrow x \circ y = 2xy - 2x - 2y + 3.$$

b) Elementul neutru $e \in \mathbb{R}$ verifică egalitățile:

$$x \circ e = e \circ x = x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Prima egalitate rezultă din comutativitatea legii de compoziție, iar a doua egalitate devine $2(e-1)(x-1) + 1 = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Obținem $2(e-1)(x-1) = x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Deci $2(e-1) = 1$, adică $e = \dfrac{3}{2}$.
c) Dacă, de exemplu, $a - 1 = \dfrac{3}{4}$ și $b - 1 = \dfrac{4}{3}$, atunci:

$$a \circ b = 2(a-1)(b-1) + 1 = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} + 1 = 3 \in \mathbb{Z}.$$

Prin urmare, pentru $a = \dfrac{7}{4}$ și $b = \dfrac{7}{3}$, avem $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ și $a \circ b \in \mathbb{Z}$. $\square$

14 Polinoame. Soluții

1. **a)** $f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$.
b) Folosind algoritmul împărțirii a două polinoame în $\mathbb{R}[X]$, obținem:

$$\begin{array}{rl|l} X^3-2X^2 & \quad +1 & X^2-2X+1 \\ \cline{3-3} -X^3+2X^2-X & & X \\ \cline{1-1} -X & +1 & \end{array}$$

Câtul împărțirii lui f la g este $q = X$, iar restul este $r = -X + 1$.
c) Din relațiile lui VIÈTE pentru polinomul f rezultă:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2;$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0.$$

Prin urmare, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 2^2 - 2 \cdot 0 = 4.$ $\square$

2. **a)** $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 1 - 3 + 2 = 0$.
b) Vom aplica schema lui HORNER pentru împărțirea polinomului $f = X^3 - 3X^2 + 2X$ la $X - 2$:

	1	-3	2	0
2	1	-1	0	0

Câtul împărțirii este $q = X^2 - X$, iar restul este $r = 0$.
c) Din teorema împărțirii în $\mathbb{R}[X]$ și din **b)** rezultă $f = X(X - 1)(X - 2)$. Prin urmare, rădăcinile lui f sunt $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, iar $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 = 5$. $\square$

3. **a)** Din $f(1) = 0$ rezultă $1^3 - 1^2 + a \cdot 1 + b = 0$, deci $a + b = 0$.
b) Pentru $a = -1$ și $b = 1$, polinomul f se poate scrie:

$$f = X^3 - X^2 - X + 1 = X^2(X - 1) - (X - 1) =$$
$$(X - 1)(X^2 - 1) = (X - 1)(X - 1)(X + 1) = (X - 1)^2(X + 1).$$

Rădăcinile lui f sunt: $x_1 = x_2 = 1$ și $x_3 = -1$.
c) Pentru că $x_1 = 1$ și $x_2 = 2$ sunt rădăcini ale polinomului f, rezultă $f(1) = 0$ și $f(2) = 0$. Avem:

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1^3 - 1^2 + a \cdot 1 + b = 0 \\ 2^3 - 2^2 + a \cdot 2 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 4 \end{cases}. \quad \square$$

4. **a)** Din $f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 1 = 0$ rezultă că $x_1 = 1$ este rădăcină a polinomului f. Conform teoremei lui BÉZOUT, f se divide cu $X - 1$.
b) Folosind relațiile lui VIÈTE, obținem:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -3;$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -3.$$

Rezultă $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = (-3)^2 - 2 \cdot (-3) = 15$.
c) ținând seamă că x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f, rezultă egalitatea

$$f = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3).$$

Prin urmare, $(2 - x_1)(2 - x_2)(2 - x_3) = f(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 1 = 13$. $\square$

5. **a)** Pentru $m = 0$, $f = X^3 + 1$, iar restul împărțirii polinomului f la $X - 1$ este $r = f(1) = 1^3 + 1 = 2$.
b) $f(-1) = (-1)^3 + m \cdot (-1)^2 + m \cdot (-1) + 1 = -1 + m - m + 1 = 0$. Rezultă că polinomul f este divizibil cu $X + 1$, pentru orice număr real m.
c) Conform **b)**, polinomul f admite rădăcina reală -1, pentru orice $m \in \mathbb{R}$. Câtul împărțirii lui f la $X + 1$ este $q = X^2 + (m - 1)X + 1$, iar restul este 0. Prin urmare, $f = (X + 1)[X^2 + (m - 1)X + 1]$. Polinomul f are 3 rădăcini reale numai dacă q are două rădăcini reale. Rezultă $\Delta = (m - 1)^2 - 4 \geq 0$, adică $m^2 - 2m - 3 \geq 0$. Obținem $m \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$. □

6. **a)** $f(\hat{1}) = m \cdot \hat{1}^5 + n \cdot \hat{1} = m + n = m \Rightarrow n = \hat{0}$.
b) Pentru orice $\alpha \in \mathbb{Z}_5$, $\alpha^5 = \alpha$. Rezultă $f(\alpha) = \alpha^5 + \hat{4}\alpha = \alpha + \hat{4}\alpha = \hat{5}\alpha = \hat{0}, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_5$. Prin urmare, rădăcinile din $\mathbb{Z}_5$ ale polinomului f sunt: $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}$.
c) Pentru orice $\alpha \in \mathbb{Z}_5$, avem $f(\alpha) = m\alpha^5 + n\alpha = m\alpha + n\alpha = \alpha(m + n)$. Din egalitatea $f(\hat{1}) = f(\hat{2})$ rezultă $m + n = \hat{2}(m + n)$, adică $m + n = \hat{0}$. Prin urmare, $f(\hat{3}) = \hat{3}(m + n) = \hat{3} \cdot \hat{0} = \hat{0}$, $f(\hat{4}) = \hat{4}(m + n) = \hat{4} \cdot \hat{0} = \hat{0}$ și $f(\hat{3}) = f(\hat{4}) = \hat{0}$. □

7. **a)** Pentru $m = 4$, polinomul f devine $f = X^3 + X^2 - 17X + 15$. Pentru determinarea câtului și a restului împărțirii polinomului $X^3 + X^2 - 17X + 15$ la $X - 3$ se poate folosi schema lui Horner:

	1	1	−17	15
3	1	4	−5	0

Câtul este $q = X^2 + 4X - 5$, iar restul este $r = 0$.
b) Polinomul f este divizibil cu $X - 1$ dacă și numai dacă $f(1) = 0$.
Cum $f(1) = 1 + m - 3 - 17 + 2m + 7 = 3m - 12$, din $3m - 12 = 0$ obținem $m = 4$.
c) Ecuația $27^x + 9^x - 17 \cdot 3^x + 15 = 0$ este echivalentă cu $3^{3x} + 3^{2x} - 17 \cdot 3^x + 15 = 0$. Folosind substituția $3^x = y$, unde $y > 0$, obținem $y^3 + y^2 - 17y + 15 = 0$. ținând seamă de **a)**, ultima ecuație se poate scrie $(y - 3)(y^2 + 4y - 5) = 0$. Din $y - 3 = 0$ rezultă $y = 3$, iar din $y^2 + 4y - 5 = 0$ rezultă $y = 1$ sau $y = -5 < 0$. Din $3^x = 3$ rezultă soluția $x = 1$, iar din $3^x = 1$ rezultă soluția $x = 0$. □

8. **a)** Din relațiile lui Viète pentru polinomul f rezultă:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -2;$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -5;$$
$$x_1x_2x_3 = -m.$$

Deci, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = (-2)^2 - 2 \cdot (-5) = 14$.
b) Avem:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} \Leftrightarrow -2 = \frac{-5}{-m}$$

Rezultă $m = -\dfrac{5}{2}$.
c) Pentru calcularea determinantului Δ vom aduna liniile a doua și a treia la prima linie a determinantului. Obținem:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} =$$
$$= -2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) = -2(-5 - 14) = 38 \in \mathbb{N}.$$ □

9. **a)** $f(\hat{1}) = \hat{1}^3 + \hat{2} \cdot \hat{1}^2 = \hat{1} + \hat{2} = \hat{0}$.
b) Polinomul f se poate scrie $f = X^3 + \hat{2}X^2 = X^2(X + \hat{2})$. Deoarece $\mathbb{Z}_3$ nu are divizori ai lui zero, rezultă că rădăcinile lui f sunt $x_1 = x_2 = \hat{0}$ și $x_3 = -\hat{2} = \hat{1}$.
c) Numărul polinoamelor din mulțimea G este egal cu numărul mulțimilor ordonate $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, adică $3^4 = 81$. □

10. **a)** $f(\hat{0}) = \hat{0}^2 + \hat{0} = \hat{0}$; $f(\hat{1}) = \hat{1}^2 + \hat{1} = \hat{2}$; $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) = \hat{0} + \hat{2} = \hat{2}$.
b) Polinomul f se poate scrie $f = X(X + \hat{1})$. ținând seamă că Z_3 nu are divizori ai lui zero, rădăcinile lui f sunt $x_1 = \hat{0}$ și $x_2 = -\hat{1} = \hat{2}$.
c) Avem $f(\hat{2}) = \hat{2}^2 + \hat{2} = \hat{6} = \hat{0}$. Deci, $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) = \hat{2} + \hat{0} = \hat{2}$. De asemenea, $g(\hat{0}) + g(\hat{1}) + g(\hat{2}) = a + (\hat{1}^2 + \hat{2} \cdot \hat{1} + a) + (\hat{2}^2 + \hat{2} \cdot \hat{2} + a) = a + a + (\hat{2} + a) = \hat{2} + \hat{3}a = \hat{2}$.
Prin urmare, $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) = g(\hat{0}) + g(\hat{1}) + g(\hat{2}) = \hat{2}, \forall a \in \mathbb{Z}_3$. □

15 Analiză matematică – Clasa a XI-a. Soluții

1. **a)** Pentru $x \in (0,+\infty)$, $f'(x) = \left(\ln x - \frac{1}{x}\right)' = (\ln x)' - \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2}$.
b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) = \frac{2+1}{2^2} = \frac{3}{4}$.
c) Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$, situat pe graficul funcției f, este de forma
$$y - y_0 = m(x - x_0),$$
unde $y_0 = f(x_0) = f(1) = \ln 1 - 1 = -1$ și $m = f'(x_0) = f'(1) = \frac{1+1}{1^2} = 2$. Obținem $y + 1 = 2(x-1)$, sau $y = 2x - 3$. □

2. **a)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x-1)e^x = (0-1)e^0 = -1\cdot 1 = -1$.
b) $f'(x) = ((x-1)e^x)' = (x-1)'e^x + (x-1)(e^x)' = e^x + (x-1)e^x = e^x + f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)+1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = e^0 + f(0) = 1 - 1 = 0$. □

3. **a)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \frac{x-1}{x-2} = \frac{3-1}{3-2} = 2$.
b) $f'(x) = \left(\frac{x-1}{x-2}\right)' = \frac{(x-1)'(x-2)-(x-1)(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)-(x-1)}{(x-2)^2} = -\frac{1}{(x-2)^2}$, $x \in (2,+\infty)$.
c) Avem $f(3) = 2$ și $f'(3) = -1$. Ecuația tangentei este $y - 2 = -1(x-3)$, sau $y = -x + 5$. □

4. **a)** Pentru $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x^3 - 3x + 7)' = 3x^2 - 3$, iar $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) = -3$.
b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x(2x+1)(3x+2)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3-3x+7}{x(2x+1)(3x+2)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{6x^3} = \frac{1}{6}$.
c) Folosind prima derivată, studiem monotonia funcției f. Avem
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}.$$
Valorile funcției f în -1 și în 1 sunt $f(-1) = 9$, respectiv $f(1) = 5$. Alcătuim tabelul de variație a funcției f:

x	$-\infty$		-1			1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	9	$\searrow$		5	$\nearrow$	$+\infty$

Din acest tabel deducem că cea mai mică valoare a funcției f pe intervalul $[-1,+\infty)$ este 5. Prin urmare, $f(x) \geq 5$, $\forall x \in [-1,+\infty)$. □

5. **a)** $f'(x) = (e^x - x)' = (e^x)' - (x)' = e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
b) Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 0$ este de forma
$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$
Înlocuind $y_0 = f(0) = e^0 = 1$ și $f'(0) = e^0 - 1 = 0$, obținem ecuația $y - 1 = 0$.
c) Inegalitatea $e^x \geq x + 1$ este echivalentă cu $f(x) \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Avem:
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0;$$
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0;$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Din semnul primei derivate deducem că f este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și crescătare pe $[0, +\infty)$. Cum $f(0) = 1$, rezultă $f(x) \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. $\square$

6. **a)** $f'(x) = (\sqrt{x} - 1)' = (\sqrt{x})' - 1' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\forall x \in (0, +\infty)$.
Rezultă $2\sqrt{x} \cdot f'(x) = 2\sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 1$, $\forall x \in (0, +\infty)$.
b) Ecuația tangentei este $y - f(4) = f'(4)(x - 4)$. Înlocuind $f(4) = \sqrt{4} - 1 = 1$ și $f'(4) = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}$, obținem $y = \dfrac{1}{4}x$.
c) Calculăm a doua derivată a lui f:

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot x} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}},\ \forall x \in (0, +\infty).$$

Cum $x\sqrt{x} > 0$ pentru $x > 0$, rezultă $f''(x) < 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$. Deci f este concavă pe acest interval. $\square$

7. **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 1 + 0 = 1$.
b) Avem $f'(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)' = 1' + \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2} < 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$. Rezultă f descrescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.
c) Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$. Înlocuind $f(1) = 2$ și $f'(1) = -1$, obținem $y = -x + 3$. $\square$

8. **a)** $f'(x) = (xe^x)' = (x)'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = (x + 1)e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
b) $f''(x) = ((x + 1)e^x)' = (x+1)'e^x + (x+1)(e^x)' = e^x + (x+1)e^x = 2e^x + xe^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
Rezultă $f''(x) + f(x) = 2e^x + xe^x + xe^x = 2xe^x + 2e^x = 2(x + 1)e^x = 2f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
c) ținând seamă că $e^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, avem:

$$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x + 1)e^x \leq 0 \Leftrightarrow x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1;$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)e^x = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1;$$
$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1)e^x \geq 0 \Leftrightarrow x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1.$$

De aici deducem că f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty, -1]$ și crescătoare pe intervalul $[-1, +\infty)$. Rezultă că $x = -1$ este punct de extrem (punct de minim) pentru funcția f. $\square$

9. **a)** Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem:
$f'(x) = \left((x + 2)^3\right)' = 3(x + 2)^2(x + 2)' = 3(x + 2)^2 = 3(x^2 + 4x + 4) = 3x^2 + 12x + 12$.
b) Din $f'(x) = 3(x + 2)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2 + 12x + 12}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2}{x^2} = 3$. $\square$

10. **a)** $f'(x) = (x \ln x)' = (x)' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = 1 + \ln x$, $\forall x \in (0, +\infty)$.
b) $x \in \left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right) \Rightarrow x \geq e^{-1} \Rightarrow \ln x \geq \ln e^{-1} \Rightarrow \ln x \geq -1 \Rightarrow \ln x + 1 \geq 0$. Rezultă $f'(x) \geq 0$ pentru $x \in \left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$. Deci f este crescătoare pe acest interval.
c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{e}$. Pentru $x \in \left(0, \dfrac{1}{e}\right]$ rezultă

$\ln x \le \ln \frac{1}{e}$, sau $\ln x \le -1$. Deci, $\ln x + 1 \le 0$ pentru $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right]$. Obținem $f'(x) \le 0$ pentru $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right]$, ceea ce înseamnă că f este descrescătoare pe acest interval. ținând seamă și de **b)**, rezultă că $f\left(\frac{1}{e}\right)$ este cea mai mică valoare a funcției f. Cum $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\ln\frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$, obținem inegalitatea $f(x) \ge -\frac{1}{e}$, $\forall x \in (0, +\infty)$. □

11. **a)** Funcția f este derivabilă pe intervalul $(0, +\infty)$ și derivata ei este

$$f'(x) = (\sqrt{x} - \ln x)' = (\sqrt{x})' - (\ln x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}}{2x} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-2}{2x}, \forall x \in (0, +\infty).$$

Derivata funcției f în punctul $x_0 = 4$ este $\lim\limits_{x\to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = f'(4) = \frac{\sqrt{4}-2}{2\cdot 4} = 0$.
b) $x > 4 \Rightarrow \sqrt{x} > \sqrt{4} \Rightarrow \sqrt{x} > 2 \Rightarrow \sqrt{x} - 2 > 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{2x} > 0$ pe intervalul $(4, +\infty)$. Rezultă că f este (strict) crescătoare pe intervalul $(4, +\infty)$.
c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(\sqrt{x} - \ln x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x} - \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = 0 - (-\infty) = +\infty$. Rezultă că dreapta de ecuație $x = 0$ (axa Oy) este asimptotă verticală (la dreapta) la graficul funcției f. □

12. **a)** Pentru orice $x \in (0, +\infty)$, avem:

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{e^x}\right)' = \frac{(x+1)'e^x - (x+1)(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{e^x - (x+1)e^x}{e^x \cdot e^x} = -\frac{xe^x}{e^x \cdot e^x} = -\frac{x}{e^x}.$$

Rezultă $\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{x}{e^x} \cdot \frac{e^x}{x+1} = -\frac{x}{x+1}$, $\forall x \in (0, +\infty)$.
b) Pentru $x \in (0, +\infty)$, avem: $x > 0$, $e^x > 0$. Rezultă $f'(x) < 0$ pe $(0, +\infty)$, deci f este (strict) descrescătoare pe acest interval.
c) Dreapta de ecuație $y = mx + n$, unde $m, n \in \mathbb{R}$, este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției g dacă $\lim\limits_{x\to+\infty} [g(x) - (mx + n)] = 0$. Avem:

$$g(x) = \frac{e^{2x}}{x} \cdot \frac{(x+1)^2}{e^{2x}} = \frac{(x+1)^2}{x} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = x + 2 + \frac{1}{x}, \forall x \in (0, +\infty).$$

Rezultă $\lim\limits_{x\to+\infty} [g(x) - (x + 2)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Prin urmare, ecuația asimptotei este $y = x + 2$. □

13. **a)** Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem:

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2-1}{x^2+2}\right)' = \frac{(2x^2-1)'(x^2+2) - (2x^2-1)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2} =$$
$$\frac{4x(x^2+2) - (2x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{4x^3 + 8x - 4x^3 + 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{10x}{(x^2+2)^2}.$$

b) Din $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-1}{x^2+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$ rezultă că ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f este $y = 2$.

c) Pentru $x \in [0,1]$, $f'(x) \geq 0$. Prin urmare f este crescătoare pe intervalul $[0,1]$. De aici rezultă $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$, pentru orice $x \in [0,1]$. Înlocuind $f(0) = -\dfrac{1}{2}$ și $f(1) = \dfrac{1}{3}$ rezultă inegalitățile din enunț. □

14. **a)** $f'(x) = \left(\dfrac{x^2-x-1}{x+1}\right)' = \dfrac{(x^2-x-1)'(x+1)-(x^2-x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \dfrac{(2x-1)(x+1)-(x^2-x-1)}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^2+2x-x-1-x^2+x+1}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

b) Folosind regula lui L'HOSPITAL, cazul $\dfrac{\infty}{\infty}$, rezultă:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)\cdot \ln x}{x^2-x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x+1)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

c) Ecuația asimptotei este de forma $y = mx+n$, unde

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-1}{x^2+x} = 1;$$
$$n = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x-1}{x+1} = -2.$$

Ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f este $y = x-2$. □

15. **a)** Funcția f este continuă în punctul 0 dacă $f(0-0) = f(0+0) = f(0)$. Avem:

$$f(0-0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{-4}{x^2+1} = -4;$$
$$f(0+0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x-4) = -4;$$
$$f(0) = \frac{-4}{0^2+1} = -4.$$

Prin urmare, $f(0-0) = f(0+0) = f(0) = -4$ și f este continuă în 0.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{f(x)}{16-x^2} = \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{16-x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(4-x)(4+x)} = \lim_{x\to 4}\frac{-1}{4+x} = -\frac{1}{8}$.

c) Punctul $A(-1,-2)$ aparține graficului funcției f, pentru că $f(-1) = \dfrac{-4}{(-1)^2+1} = -2$. Ecuația tangentei în punctul A este $y - f(-1) = f'(-1)(x+1)$. Pentru calcularea lui $f'(-1)$ ținem seamă că, pentru $x<0$, $f'(x) = \left(\dfrac{-4}{x^2+1}\right)' = \dfrac{4(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \dfrac{8x}{(x^2+1)^2}$. Rezultă $f'(-1) = \dfrac{8\cdot(-1)}{\left((-1)^2+1\right)^2} = -2$. Cum $f(-1) = -2$, ecuația tangentei este $y+2 = -2(x+1)$, sau $y = -2x-4$. □

16. **a)** Pentru $x \in [1,+\infty)$, $f'(x) = \left(e^x - \dfrac{1}{x}\right)' = (e^x)' - \left(\dfrac{1}{x}\right)' = e^x + \dfrac{1}{x^2}$. Rezultă $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) = e^2 + \frac{1}{4}$.

b) Din $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in [1,+\infty)$ rezultă f strict crescătoare pe $[1,+\infty)$. Prin

urmare, pentru orice $x \geq 1$ avem $f(x) \geq f(1) = \mathrm{e} - 1 > 0$.
c) Avem:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x - \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = +\infty - 0 = +\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(\mathrm{e}^x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x = +\infty.$$

Deoarece niciuna dintre aceste limite nu este finită, rezultă că f nu are asimptote spre $+\infty$. □

17. **a)** Oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, avem:

$$f'(x) = \left(\frac{x+2}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(x+2)'(x-1)^2 - (x+2)\left((x-1)^2\right)'}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(x-1)^2 - (x+2)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)(x-1-2x-4)}{(x-1)^4} = \frac{-x-5}{(x-1)^3}.$$

b) Calculăm limitele laterale ale funcției f în punctul 1:

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{x+2}{(x-1)^2} = \frac{1+2}{(1-0-1)^2} = \frac{3}{+0} = +\infty;$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{x+2}{(x-1)^2} = \frac{1+2}{(1+0-1)^2} = \frac{3}{+0} = +\infty.$$

Rezultă că dreapta de ecuație $x = 1$ este asimptotă verticală (la stânga și la dreapta) pentru funcția f. Cum f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, dreapta $x = 1$ este singura asimptotă verticală a lui f.
c) Studiem semnul primei derivate a funcției f:

x	$-\infty$		-5			1		$+\infty$
$-x-5$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$(x-1)^3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f'(x) = \dfrac{-x-5}{(x-1)^3}$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$\vert$	$-$	$-$

Rezultă f descrescătoare pe $(-\infty, -5]$ și crescătoare pe $[-5, 1)$. Prin urmare, pentru orice $x \in (-\infty, 1)$, $f(x) \geq f(-5) = \dfrac{-5+2}{(-5-1)^2} = -\dfrac{1}{12}$, inegalitate echivalentă cu $f(x) + \dfrac{1}{12} \geq 0$, $\forall x \in (-\infty, 1)$. □

18. **a)** Penru $x \in (0, +\infty)$, $f'(x) = (\ln x + \mathrm{e}^x)' = \dfrac{1}{x} + \mathrm{e}^x$. Rezultă $xf'(x) = x\left(\dfrac{1}{x} + \mathrm{e}^x\right) = 1 + x\mathrm{e}^x$, $\forall x \in (0, +\infty)$.
b) Ecuția tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x-1)$. Înlocuind $f(1) = \mathrm{e}$ și $f'(1) = 1 + \mathrm{e}$ rezultă ecuația $y = (1+\mathrm{e})x - 1$.
c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x + \mathrm{e}^x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x + \mathrm{e}^x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} + \mathrm{e}^x\right) = +\infty.$ □

19. **a)** Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și

$$f'(x) = \left(x^3 + x^2 + x + 3^x\right)' = 3x^2 + 2x + 1 + 3^x \ln 3,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rezultă $f'(0) = 1 + \ln 3$.
b) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2x^2 + (x+1)^2 + 3^x \ln 3 > 0,$$

pentru că $2x^2 \geq 0$, $(x+1)^2 \geq 0$ și $3^x \ln 3 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Rezultă f crescătoare pe $\mathbb{R}$.
c) ținând seamă că f este crescătoare pe $\mathbb{R}$, din $a \leq b$ rezultă $f(a) \leq f(b)$, adică $a^3 + a^2 + a + 3^a \leq b^3 + b^2 + b + 3^b$, inegalitate echivalentă cu cea din enunț. □

20. **a)** Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $f'(x) = (\mathrm{e}^x - x)' = \mathrm{e}^x - 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Rezultă $f'(x) - f(x) = \mathrm{e}^x - 1 - (\mathrm{e}^x - x) = x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
b) Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $(0, f(0))$ este

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0).$$

Înlocuind $f(0) = 1$ și $f'(0) = 0$, obținem $y - 1 = 0$.
c) Ecuația asimptotei oblice la graficul funției f spre $-\infty$ este de forma $y = mx + n$, unde $m, n \in \mathbb{R}$ și

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x - x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{(\mathrm{e}^x - x)'}{x'} = \lim_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^x - 1) = -1;$$
$$n = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty} (f(x) + x) = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-\infty} = 0.$$

Ecuația asimptotei este $y = -x$. □

21. **a)** Pentru orice $x \in [0, 1]$, derivata funcției f este

$$f'(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\right)' = \frac{(\mathrm{e}^x)'(1+x) - \mathrm{e}^x(1+x)'}{(1+x)^2} = \frac{\mathrm{e}^x(1+x) - \mathrm{e}^x}{(1+x)^2} = \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}.$$

Rezultă

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2} \cdot \frac{1+x}{\mathrm{e}^x} = \frac{x}{x+1},\ \forall x \in [0, 1].$$

b) Pentru $x \in [0, 1]$, $f'(x) \geq 0$. Deci, f este crescătoare pe acest interval.
c) Fie $0 < x < 1$. Pentru că f este crescătoare pe $[0, 1]$, rezultă $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$, adică $1 \leq f(x) \leq \frac{\mathrm{e}}{2}$. De aici, $\frac{2}{\mathrm{e}} \leq \frac{1}{f(x)} \leq 1$. □

22. **a)** Pentru $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \left(x^2 + \frac{2}{x}\right)' = (x^2)' + \left(\frac{2}{x}\right)' = 2x - \frac{2}{x^2}$.
b) Ecuația tangentei este $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$. Cum $f(2) = 5$ și $f'(2) = \frac{7}{2}$, obținem $y = \frac{7}{2}x - 2$.
c) f are limită finită în orice punct din $\mathbb{R}^*$. Limitele laerale ale funcției f în 0 sunt:

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \left(x^2 + \frac{2}{x}\right) = \frac{2}{-0} = -\infty;\ \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \left(x^2 + \frac{2}{x}\right) = \frac{2}{+0} = +\infty.$$

Rezultă că dreapta $x = 0$ este singura asimptotă verticală (la stânga și la dreapta) a funcției f. □

23. **a)** $f'(x) = (x^2\mathrm{e}^x)' = (x^2)'\mathrm{e}^x + x^2(\mathrm{e}^x)' = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = (2x + x^2)\mathrm{e}^x$, $x \in \mathbb{R}$.
b) Pentru $x \in [-2, 0]$, $x \leq 0$ și $x + 2 \geq 0$. Cum $\mathrm{e}^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă $f'(x) = x(x+2)\mathrm{e}^x \leq 0$, $\forall x \in [-2, 0]$. Prin urmare, f este descrescătoare pe intervalul $[-2, 0]$.
c) Pentru $x \in [0, 1]$, $f'(x) \geq 0$. Deci f este crescătoare pe $[0, 1]$.
Fie $x \in [-1, 0]$. Rezultă $-1 \leq x \leq 0$ și $0 \leq x^2 \leq 1$. Din monotonia funcției f rezultă

$$f(0) \leq f(x) \leq f(-1);$$
$$f(0) \leq f(x^2) \leq f(1)$$

Prin adunarea, membru cu membru, a acestor inegalități obținem

$$0 \leq f(x) + f(x^2) \leq \frac{\mathrm{e}^2 + 1}{\mathrm{e}}, \ \forall x \in [-1, 0].$$ □

24. **a)** $f'(x) = \left(\sqrt{x^2+3}\right)' = \dfrac{(x^2+3)'}{2\sqrt{x^2+3}} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$, $x \in \mathbb{R}$.
b) Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x-1)$, sau, ținând seamă că$f(1) = 2$ și $f'(1) = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$.
c) Ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f este $y = mx + n$, unde

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{x} = 1;$$
$$n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x} = 0.$$

Ecuația asimptotei este $y = x$. □

16 Analiză matematică – Clasa a XII-a. Soluții

1. **a)** $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\Big|_0^1 = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e} - 1.$

b) F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și

$$F'(x) = \left(\mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2} - 1\right)' = \mathrm{e}^x - \frac{2x}{2} = \mathrm{e}^x - x = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rezultă că funcția F este o primitivă a funcției f.

c)

$$\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2} - 1\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x - \int_0^1 1\mathrm{d}x =$$
$$= \mathrm{e}^x\Big|_0^1 - \frac{x^3}{6}\Big|_0^1 - x\Big|_0^1 = \mathrm{e} - 1 - \frac{1}{6} - 1 = \mathrm{e} - \frac{13}{6}.$$ □

2. **a)** $\displaystyle\int_1^2 3x^2 \mathrm{d}x = 3\int_1^2 x^2 \mathrm{d}x = x^3\Big|_1^2 = 2^3 - 1^3 = 7.$

b) Mulțimea primitivelor funcției f este

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int (3x^2 + 2x)\mathrm{d}x = 3\int x^2 \mathrm{d}x + 2\int x\mathrm{d}x = x^3 + x^2 + \mathcal{C}.$$

Rezultă că primitiva F a funcției f pentru care $F(1) = 2014$ este de forma $F(x) = x^3 + x^2 + c$, unde $c \in \mathbb{R}$. Din condiția $F(1) = 2014$ rezultă $2 + c = 2014$, de unde $c = 2012$ și $F(x) = x^3 + x^2 + 2012$.

c) $\displaystyle\int_1^n \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_1^n (3x+2)\mathrm{d}x = \left(\frac{3x^2}{2} + 2x\right)\Big|_1^n = \frac{3n^2 + 4n - 7}{2}.$

Ecuația $\dfrac{3n^2 + 4n - 7}{2} = \dfrac{13}{2}$ este echivalentă cu $3n^2 + 4n - 20 = 0$, având soluțiile $n_1 = -\dfrac{10}{3} \notin \mathbb{N}$ și $n_2 = 2$. Deci $n = 2$. □

3. **a)** $\displaystyle\int_{-1}^1 (2x+1)\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^1 x\mathrm{d}x + \int_{-1}^1 \mathrm{d}x = x^2\Big|_{-1}^1 + x\Big|_{-1}^1 = 1^2 - (-1)^2 + 1 - (-1) = 2.$

b) Pentru $x \in [0,1]$, $g(x) = f(x) - 2x - 1 = x^2 + 2x + 1 - 2x - 1 = x^2$. Volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției g în jurul axei Ox este

$$\mathcal{V} = \pi\int_0^1 g^2(x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^1 x^4 \mathrm{d}x = \pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}.$$

c) Deoarece F este o primitivă a lui f, rezultă că F este derivabilă și

$$F'(x) = f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Prin urmare, F este crescătoare pe $\mathbb{R}$. □

4. **a)** Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x + 2x - \mathrm{e}^x = 2x$. Prin urmare,

$$\int_1^2 (f(x) - \mathrm{e}^x)\mathrm{d}x = \int_1^2 2x\mathrm{d}x = x^2\Big|_1^2 = 2^2 - 1^2 = 3.$$

b) F este derivabilă și $F'(x) = \left(\mathrm{e}^x + x^2 + 2014\right)' = \mathrm{e}^x + 2x = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Deci F este o primitivă a lui f.
c) ținând seamă că $f = F'$, avem:

$$\int_0^1 f(x)F(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 F(x)F'(x)\mathrm{d}x = \left.\frac{F^2(x)}{2}\right|_0^1 =$$
$$= \frac{(\mathrm{e}+2015)^2 - 2015^2}{2} = \frac{\mathrm{e}^2 + 2\mathrm{e}\cdot 2015 + 2015^2 - 2015^2}{2} = \frac{\mathrm{e}^2 + 4030\mathrm{e}}{2}. \qquad \square$$

5. **a)** Pentru $x \in (0, +\infty)$, $3 - f(x) = 3 - \left(3 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}$ și

$$\int_1^2 (3 - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

b) Mulțimea primitivelor funției f este

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int \left(3 - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int 3\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = 3x - \ln x + \mathcal{C}.$$

Prin urmare, F este de forma $F(x) = 3x - \ln x + c$, unde $c \in \mathbb{R}$. Din condiția $F(1) = 3$ obținem $3 - \ln 1 + c = 3$, deci $c = 0$ și $F(x) = 3x - \ln x$.
c) Pentru $x \in [1,2]$, $g(x) = xf(x) = x\left(3 - \frac{1}{x}\right) = 3x - 1$. Volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției g este

$$\mathcal{V} = \int_1^2 g^2(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 (3x-1)^2 = \int_1^2 (9x^2 - 6x + 1)\mathrm{d}x =$$
$$= 9\int_1^2 x^2\mathrm{d}x - 6\int_1^2 x\mathrm{d}x + \int_1^2 1\mathrm{d}x = 9\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 - 6\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2 + x\Big|_1^2 =$$
$$= 3x^3\Big|_1^2 - 3x^2\Big|_1^2 + x\Big|_1^2 = 3\left(2^3 - 1^3\right) - 3\left(2^2 - 1^2\right) + (2-1) = 13. \qquad \square$$

6. **a)**

$$\int_1^2 \left(f(x) - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(2x + 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int_1^2 (2x+1)\mathrm{d}x =$$
$$= 2\int_1^2 x\mathrm{d}x + \int_1^2 1\mathrm{d}x = x^2\Big|_1^2 + x\Big|_1^2 = 2^2 - 1^2 + 2 - 1 = 4.$$

b) Funcția F este derivabilă și $F'(x) = \left(x^2 + x + \ln x\right)' = 2x + 1 + \frac{1}{x} = f(x)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$. Rezultă că F este o primitivă funției f.
c) Pe intervalul $[1,2]$ funția f este continuă și pozitivă, deci aria este

$$\mathcal{A} = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_1^2 = \left(x^2 + x + \ln x\right)\Big|_1^2 =$$
$$= \left(2^2 + 2 + \ln 2\right) - \left(1^2 + 1 + \ln 1\right) = 4 + \ln 2. \qquad \square$$

7. **a)** $\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\Big|_0^1 = \left(3x^2+1\right)\Big|_0^1 = (3\cdot 1^2+1)-(3\cdot 0^2+1) = 3.$

b) F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $F'(x) = \left(x^3+x+1\right)' = 3x^2+1 = f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Rezultă că F este o primitivă a lui f.

c) Aria cerută este $\mathcal{A} = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(3x^2+1\right)\mathrm{d}x = \left(x^3+x\right)\Big|_0^1 = 2.$ □

8. **a)** $\int_4^5 xf(x)\mathrm{d}x = \int_4^5 x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int_4^5 1\mathrm{d}x = x\Big|_4^5 = 1.$

b) F este derivabilă și $F'(x) = (4+\ln x)' = \frac{1}{x} = f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$. Rezultă că F este o primitivă funcției f.

c) Funcția f este continuă și strict pozitivă pe intervalul $(5,+\infty)$, deci aria suprafeței delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație $x=5$ și $x=a$ este

$$\mathcal{A} = \int_5^a f(x)\mathrm{d}x = \int_5^a \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x\Big|_5^a = \ln a - \ln 5 = \ln\frac{a}{5}.$$

Din egalitatea $\mathcal{A} = \ln 3$ obținem $\ln\frac{a}{5} = \ln 3$, deci $\frac{a}{5} = 3$ și $a = 15$. □

9. **a)** Funcția F este derivabilă și $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' + x' = x^2+1 = f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Prin urmare, F este o primitivă a lui f.

b) Funția f este continuă și pozitivă pe $[0,1]$. Aria este

$$\mathcal{A} = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_0^1 = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}+1 = \frac{4}{3}.$$

c) Pentru $x\in\mathbb{R}^*$, $\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2+1}{x} = \frac{x^2}{x}+\frac{1}{x} = x+\frac{1}{x}$. Rezultă

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}+\ln x\right)\Big|_1^2 = \frac{3}{2}+\ln 2.$$ □

10. **a)** F este derivabilă pe $(0,+\infty)$ și

$$F'(x) = \left(x-\frac{1}{x}+\ln x\right)' = x' - \left(\frac{1}{x}\right)' + (\ln x)' = 1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x} = f(x),\ \forall x\in(0,+\infty).$$

Rezultă că F este o primitivă a lui f.

b) Folosind schimbarea de variabilă $t = x^2$, $\mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$, se obține:

$$\int_1^{\mathrm{e}} xf(x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}} f(x^2)\cdot 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}^2} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}F(t)\Big|_1^{\mathrm{e}^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}+\ln t\right)\Big|_1^{\mathrm{e}^2} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^2-\frac{1}{\mathrm{e}^2}+\ln\mathrm{e}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^2-\frac{1}{\mathrm{e}^2}+2\right).$$

c) Avem:

$$\int_1^a\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int_1^a\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \left(x-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^a = a-\frac{1}{a}.$$

Ecuația $a-\frac{1}{a} = \frac{3}{2}$ este echivalentă cu $2a^2-3a-2=0$. Soluțiile sunt $a_1 = 2$, $a_2 = -\frac{1}{2}$. Rezultă $a = 2$. □

11. **a)** Funția F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și, pentru orice număr real x, avem:

$$F'(x) = (x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 2012)' = (x\mathrm{e}^x)' - (\mathrm{e}^x)' + (2012)' =$$
$$= (x\mathrm{e}^x)' - \mathrm{e}^x = x'\mathrm{e}^x + x(\mathrm{e}^x)' - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x = f(x).$$

Rezultă că funția F este o primitivă a lui f.

b) Pentru orice $x > 0$, $f(\ln x) = (\ln x)\mathrm{e}^{\ln x} = x \ln x$. Folosind formula de integrare prin părți, rezultă:

$$\int_1^{\mathrm{e}} f(\ln x)\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}.$$

c) Volumul este $\mathcal{V} = \pi\displaystyle\int_1^2 g^2(x)\mathrm{d}x = \pi\int_1^2 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \pi\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\Big|_1^2 = \frac{\pi\mathrm{e}^2(\mathrm{e}^2-1)x}{2}$. □

12. **a)** Mulțimea primitivelor funcției f este

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int \left(x^{2012} + x^{2011} + x^2 + x\right)\mathrm{d}x = \frac{x^{2013}}{2013} + \frac{x^{2012}}{2012} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \mathcal{C}.$$

Rezultă că F este de forma $F(x) = \dfrac{x^{2013}}{2013} + \dfrac{x^{2012}}{2012} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{c}$, $\mathrm{c}\in\mathbb{R}$. Din $F(0)=1$ deducem $\mathrm{c}=1$. Prin urmare,

$$F(x) = \frac{x^{2013}}{2013} + \frac{x^{2012}}{2012} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 1.$$

b) $f(x) = x^{2012} + x^{2011} + x^2 + x = x^{2011}(x+1) + x(x+1) = (x+1)(x^{2011}+x)$. Avem:

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^{2011}+x\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^{2012}}{2012} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2012} + \frac{1}{2} = \frac{1007}{2012}.$$

c) Pentru $x\in[1,2]$, $g(x) = x^2 + x$, iar $g^2(x) = \left(x^2+x\right)^2 = x^4 + 2x^3 + x^2$. Volumul este

$$\mathcal{V} = \pi\int_1^2 g^2(x)\mathrm{d}x = \pi\int_1^2 \left(x^4 + 2x^3 + x^2\right)\mathrm{d}x = \pi\left(\frac{x^5}{5} + 2\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 = \frac{481\pi}{30}. \quad □$$

13. **a)** $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = [x - \ln(x+1)]\Big|_0^1 = 1 - \ln 2.$

b) $I_n + I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{x^n}{x+1} + \frac{x^{n+1}}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{x+1}\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}.$

c) Pentru $x\in[0,1]$, avem $0\le x\le 1$, deci $1\le x+1\le 2$ și $\dfrac{1}{2}\le\dfrac{1}{x+1}\le 1$. De aici rezultă inegalitățile $\dfrac{x^{2012}}{2}\le\dfrac{x^{2012}}{x+1}\le x^{2012}$, prin înmulțire cu $x^{2012}\ge 0$. Prin urmare,

$$\int_0^1 \frac{x^{2012}}{2}\mathrm{d}x \le \int_0^1 \frac{x^{2012}}{x+1}\mathrm{d}x \le \int_0^1 x^{2012}\mathrm{d}x, \text{ adică } \frac{1}{4026} \le I_{2012} \le \frac{1}{2013}. \quad □$$

14. **a)** Pentru $x \in (0, +\infty)$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{\mathrm{e}^x \cdot \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} = \mathrm{e}^x$. Mulțimea primitivelor funției g este

$$\int g(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + \mathcal{C}.$$

b) Folosind formula de integrare prin părți, obținem:

$$\int_1^2 \sqrt{x+1} \cdot f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 (x+1) \cdot \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \int_1^2 (x+1)(\mathrm{e}^x)' \mathrm{d}x =$$
$$= (x+1)\mathrm{e}^x \Big|_1^2 - \int_1^2 \mathrm{e}^x (x+1)' \mathrm{d}x = (x+1)\mathrm{e}^x \Big|_1^2 - \int_1^2 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x =$$
$$= (x+1)\mathrm{e}^x \Big|_1^2 - \mathrm{e}^x \Big|_1^2 = x\mathrm{e}^x \Big|_1^2 = 2\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}.$$

c) Funcția h este pozitivă. Aria cerută este

$$\mathcal{A} = \int_2^3 h(x)\mathrm{d}x = \int_2^3 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_2^3 (x+1)^{\frac{1}{2}} (x+1)' \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \Big|_2^3 = \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} \Big|_2^3 = \frac{2}{3}\left(8 - 3\sqrt{3}\right).$$

□

15. **a)** $f_0(x) = 9$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mulțimea primitivelor funcției f_0 este

$$\int f_0(x)\mathrm{d}x = \int 9\,\mathrm{d}x = 9x + \mathcal{C}.$$

b) $f_1(x) = 3x^2 + 6x + 9 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Aria cerută este

$$\mathcal{A} = \int_0^1 f_1(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(3x^2 + 6x + 9\right)\mathrm{d}x = \left(x^3 + 3x^2 + 9x\right) \Big|_0^1 = 13.$$

c) Pentru $m = 2$ obținem $f_2(x) = 12x^2 + 12x + 9$, $\forall x \in \mathbb{R}$, iar $\dfrac{f_2(x) - 9}{x} = 12x + 12$. Avem:

$$\int_1^2 (12x + 12)\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = 12 \int_1^2 (x+1)\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = 12x\mathrm{e}^x \Big|_1^2 = 24\mathrm{e}^2 - 12\mathrm{e}.$$

□

16. **a)** Volumul este $\mathcal{V} = \pi \displaystyle\int_0^3 g^2(x)\mathrm{d}x = \pi \int_0^3 \left(x^2 + 10\right)\mathrm{d}x = \pi \left(\frac{x^3}{3} + 10x\right) \Big|_0^3 = 39\pi.$

b) Fie F o primitivă a funcției f. Rezultă $F'(x) = f(x) = \sqrt{x^2 + 10} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Din $F'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că F este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Folosind schimbarea de variabilă $x = -t$, $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$, obținem:

$$\int_{-10}^0 f(x)\mathrm{d}x = -\int_{10}^0 f(-t)\mathrm{d}t = \int_0^{10} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x.$$

Prin urmare,

$$\int_{-10}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-10}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x.$$

□

17. **a)** $\displaystyle\int_2^{\mathrm{e}} \frac{f(x)}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_2^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x\Big|_2^{\mathrm{e}} = 1 - \ln 2.$

b) Pentru $x \in (0,1]$, $g(x) = \dfrac{x-1}{x}$. Determinăm primitivele funcției g:

$$\int g(x)\mathrm{d}x = \int \frac{x-1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = x - \ln x + \mathcal{C}.$$

Primitiva cerută este de forma $G(x) = x - \ln x + c$. Constanta reală c se determină din condiția $G(1) = 5$. Cum $G(1) = 1 + c$, rezultă $c = 4$. Deci, primitiva căutată este $G\colon (0,1] \to \mathbb{R}$, $G(x) = x - \ln x + 4$.

c) Funcția f este continuă pe $\left[\dfrac{1}{2}, e\right]$, deci integrabilă. Avem:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{e} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x-1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Vom calcula separat fiecare integrală:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x-1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(1 - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = (x - \ln x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{2} + \ln\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \ln 2;$$

Pentru a doua integrală vom face schimbarea de variabilă $t = \ln x$, $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. Pentru $x \in [1,e]$, $t \in [0,1]$. Rezultă

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 t\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Prin urmare, $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{e} f(x)\mathrm{d}x = 1 - \ln 2.$ □

18. **a)** Aria este $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(3x^2 + 2x + 1\right)\mathrm{d}x = \left(x^3 + x^2 + x\right)\Big|_0^1 = 3.$

b) Fie F o primitivă a funcției f. Atunci $F'(x) = f(x)$, iar $F''(x) = f'(x) = \left(3x^2 + 2x + 1\right)' = 6x + 2 = 2(3x+1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Pentru $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right)$, avem $x < -\dfrac{1}{3}$, adică $3x + 1 < 0$. Deci $F'' < 0$ pe acest interval. Rezultă că F este concavă pe intervalul $\left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right)$

c) Avem $\displaystyle\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \left(x^3 + x^2 + x\right)\Big|_0^a = a^3 + a^2 + a$. Inegalitatea $a^3 + a^2 + a \geq 3a^2 + 2$ este echivalentă cu $a^3 - 2a^2 + a - 2 \geq 0$, sau $a^2(a-2) + (a-2) \geq 0$, adică $(a-2)\left(a^2+1\right) \geq 0$. Împărțind ambii membri ai acestei inegalități prin $a^2 + 1 > 0$, obținem $a - 2 \geq 0$, adevărată pentru orice $a \geq 2$. □

19. **a)** $f_1(x) = xe^x$, $x \in [0,1]$. Prin urmare, $\displaystyle\int_0^1 \frac{f_1(x)}{e^x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$

b) $\displaystyle\int_0^1 f_1(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xe^x\mathrm{d}x = \int_0^1 x(e^x)'\mathrm{d}x = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\mathrm{d}x = e - e^x\Big|_0^1 = 1.$

c) Pentru $x \in [0,1]$, $f_n\left(x^2\right) = x^{2n}e^{x^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Folosind monotonia funcției exponențiale, din $x^2 \geq 0$ rezultă $e^{x^2} \geq e^0$, adică $e^{x^2} \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. De aici, prin înmulțire cu $x^{2n} \geq 0$, deducem $f_n(x^2) \geq x^{2n}$, $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Folosind ultima inegalitate, obținem

$$\int_0^1 f_n\left(x^2\right) \mathrm{d}x \geq \int_0^1 x^{2n} \mathrm{d}x = \left.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^1 = \frac{1}{2n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \qquad \square$$

20. **a)** $\displaystyle\int_1^e \left(f(x) - \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}x = \int_1^e \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = \ln x\Big|_1^e = 1.$

b) Pentru $x \in [1,2]$, $f(x) > 0$. Aria este $\displaystyle\mathcal{A} = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}x =$
$\displaystyle= \int_1^2 \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{1}{x+1}\, \mathrm{d}x = \ln x\Big|_1^2 + \ln(x+1)\Big|_1^2 = \ln 3.$

c) Volumul este

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \pi \int_1^2 g^2(x)\mathrm{d}x = \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right)^2 \mathrm{d}x = \\
&= \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{x(x+1)}\right) \mathrm{d}x = \\
&= \pi \int_1^2 \frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x + \pi \int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2}\, \mathrm{d}x + \pi \int_1^2 \frac{2}{x(x+1)}\, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Avem:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_1^2 \frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x = \int_1^2 x^{-2}\mathrm{d}x = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}; \\
I_2 &= \int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2}\, \mathrm{d}x = \int_1^2 (x+1)^{-2}(x+1)'\mathrm{d}x = -\frac{1}{x+1}\Big|_1^2 = \frac{1}{6}; \\
I_3 &= 2\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x = 2\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}x = 2\left[\ln x - \ln(x+1)\right]\Big|_1^2 = 2\ln\frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Prin urmare, $\displaystyle\mathcal{V} = \pi\left(I_1 + I_2 + I_3\right) = \pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + 2\ln\frac{4}{3}\right) = \pi\left(\frac{2}{3} + 2\ln\frac{4}{3}\right).$ $\square$

21. **a)** Funcția f este continuă pe $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Studiem continuitatea în punctul 1. Avem:

$$\begin{aligned}
l_s &= f(1-0) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} 2x = 2; \\
l_d &= f(1+0) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \sqrt{x^2+3} = 2; \\
f(1) &= \sqrt{1^2+3} = \sqrt{4} = 2.
\end{aligned}$$

Din $f(1-0) = f(1+0) = f(1)$ rezultă că f este continuă și în punctul 1. Funcția f, fiind continuă pe $\mathbb{R}$, admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Volumul este $\displaystyle\mathcal{V} = \pi \int_1^2 g^2(x)\mathrm{d}x = \pi \int_1^2 \left(x^2+3\right) \mathrm{d}x = \pi\left(\frac{x^3}{3} + 3x\right)\Big|_1^2 = \frac{16\pi}{3}.$

c) Cu schimbarea de variabilă $t = \sqrt{x^2+3}$, $t \in [2,3]$, $t^2 = x^2 + 3$, $t\mathrm{d}t = x\mathrm{d}x$, obținem

$$\int_1^{\sqrt{6}} x\sqrt{x^2+3}\, \mathrm{d}x = \int_2^3 t^2\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3}\Big|_2^3 = \frac{19}{3}. \qquad \square$$

22. **a)** Funcția g este derivabilă pe $(0,+\infty)$ și

$$g'(x) = (2\sqrt{x}(\ln x - 2))' = (2\sqrt{x})'(\ln x - 2) + (2\sqrt{x})(\ln x - 2)' =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x}}(\ln x - 2) + 2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}(\ln x - 2) + \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = f(x),\ \forall x \in (0,+\infty).$$

Rezultă că g este o primitivă lui f.

b) ținând seamă că g este o primitivă a lui f, avem:

$$\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x = g(x)\Big|_1^4 = 2\sqrt{x}(\ln x - 2)\Big|_1^4 = 8\ln 2 - 4.$$

c) Notăm $t = g(x)$; $\mathrm{d}t = g'(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$. Pentru $x \in [1, e^2]$, $t \in [-4, 0]$, prin urmare

$$\int_1^{e^2} 2^{g(x)}\cdot f(x)\mathrm{d}x = \int_{-4}^0 2^t\mathrm{d}t = \frac{2^t}{\ln 2}\Big|_{-4}^0 = \frac{1}{\ln 2}\left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{15}{16\ln 2}.$$ □

23. **a)** $\displaystyle\int_1^3 \left(f(x) - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int_1^3 \left(x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int_1^3 x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\Big|_1^3 = 4.$

b) Volumul corpului este

$$\mathcal{V} = \pi\int_1^2 g^2(x)\mathrm{d}x = \pi\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x = \pi\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \pi\left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + 2x\right)\Big|_1^2 = \frac{29\pi}{6}.$$

c) $\displaystyle I = \int_1^e f(x)\cdot\ln x\,\mathrm{d}x = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right)\cdot\ln x\,\mathrm{d}x = \int_1^e x\cdot\ln x\,\mathrm{d}x + \int_1^x \frac{1}{x}\cdot\ln x\,\mathrm{d}x\,;$

$$I_1 = \int_1^e x\cdot\ln x\,\mathrm{d}x = \int_1^e (\ln x)\left(\frac{x^2}{2}\right)'\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e (\ln x)'\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_1^e x\mathrm{d}x = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{x^2}{4}\right)\Big|_1^e = \frac{e^2+1}{4}\,;$$
$$I_2 = \int_1^e \frac{1}{x}\cdot\ln x\,\mathrm{d}x = \int_1^e (\ln x)(\ln x)'\mathrm{d}x = \frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^e = \frac{1}{2}.$$

Prin urmare, $I = I_1 + I_2 = \dfrac{e^2+1}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^2+3}{4}$. □

24. **a)** Pentru $x \in (0,+\infty)$, $f_1(x) = x\ln x$ și $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{f_1(x)}\mathrm{d}x = \int_e^{e^2} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x\Big|_e^{e^2} = 1.$

b) Dacă $F\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ este o primitivă funcției f_1, atunci $F'(x) = f_1(x)$ și $F''(x) = f_1'(x) = (x\ln x)' = \ln x + 1$, $\forall x \in (0,+\infty)$. Pentru $x \in \left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$, folosind monotonia funcției logaritmice, obținem:

$$x \geq \frac{1}{e} \Rightarrow \ln x \geq \ln\frac{1}{e} \Rightarrow \ln x \geq \ln 1 - \ln e \Rightarrow \ln x + 1 \geq 0.$$

Așadar, $F''(x) \geq 0$, $\forall x \in \left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$, deci F este convexă pe acest interval.

c) $\displaystyle\int_1^e \frac{f_{2009}(x)}{x^{2010}}\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{x^{2009}\ln x}{x^{2010}}\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int_1^e \ln x(\ln x)'\mathrm{d}x = \frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^e = \frac{1}{2}.$

□

Bibliografie

[1] Burtea, Marius; Burtea, Georgeta, *Matematică. Manual pentru clasa a IX-a*, Editura CARMINIS, Pitești, 2004.

[2] Burtea, Marius; Burtea, Georgeta, *Matematică. Manual pentru clasa a X-a*, Editura CARMINIS, Pitești, 2005.

[3] Burtea, Marius; Burtea, Georgeta, *Matematică. Manual pentru clasa a XII-a*, Editura CARMINIS, Pitești, 2007.

[4] Necșuleu, Ion; Saulea, Tatiana; Bulcan, Cristian; Postolache, Mihai, *Matematică. Manual pentru clasa a XI-a*, Editura FAIR PARTNERS, 2008.

[5] Centrul Național de Evaluare şi Examinare. Subiecte examene naționale