

LICEUL TEHNOLOGIC „ COSTACHE CONACHI”, LOCALITATEA PECHEA, JUDEȚUL GALAȚI

Profesori: ARMENCEA MONA, ATANASIU GINA, COSTIN SILVIA SĂNDICA

Clasa a XII-a, filiera tehnologică

Disciplina: Matematică – Algebră

An școlar: 2023-2024

Nr. de ore/ săptămână: 3

Proiectul unității de învățare  
INELE DE POLINOAME CU COEFICIENTI ÎNTR-UN CORP COMUTATIV

***COMPETENȚE SPECIFICE:***

*C1. Recunoașterea mulțimilor de polinoame*

*C3.2. Aplicarea unor algoritmi în calculul polinomial sau în rezolvarea ecuațiilor algebrice*

*C5.2 Determinarea unor polinoame sau ecuații algebrice care îndeplinesc condiții date*

*C6.1 Exprimarea unor probleme practice folosind calcul polinomial*

*C6.2 Aplicarea prin analogie, în calcule cu polinoame a metodelor de lucru din aritmetica numerelor*

**Nr. ore alocate: 12 ORE**

<b>CONȚINUTURI- detaliate ale unității de învățare</b>	<b>COMPETENȚE SPECIFICE vizate</b>	<b>ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE</b>	<b>RESURSE</b>	<b>EVALUARE</b>
1. Forma algebrică a unui polinom 1 oră	C1	<ul style="list-style-type: none"><li>➤ Introducerea noțiunii de polinom cu coeficienți într-un corp comutativ <math>K</math>.</li><li>➤ Prezentarea formei algebrice a unui polinom, identificarea coeficienților, stabilirea gradului unui polinom, polinoame egale.</li></ul>	<i>Resurse materiale :</i> Tabla, manual , culegere de probleme	<ul style="list-style-type: none"><li>❖ Observația sistematică a elevilor</li><li>❖ Aprecierea verbală</li></ul>

	C5.2	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Exprimarea, prin simboluri specifice, a relațiilor matematice dintr-o problemă</li> <li>➤ Exerciții de aflare a unor parametri în funcție de gradul polinomului</li> <li>➤ Stabilirea gradului unui polinom în funcție de anumiți parametri</li> </ul>	<p><u>Resurse procedurale:</u> explicatia, conversatia euristica , exercitiul activității frontale și individuale</p> <p>Tema pentru acasă</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Aprecierea răspunsurilor primite</li> </ul>
<p>2.Operații cu polinoame(adunarea, înmulțirea, înmulțirea cu un scalar) 1 oră</p>	C3.2	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Definirea operațiilor de adunare, înmulțirea a două sau mai multe polinoame, înmulțirea unui polinom cu un scalar</li> <li>➤ Identificarea proprietăților adunării și înmulțirii polinoamelor cu coeficienți într-un corp comutativ</li> <li>➤ Definirea noțiunii de inel de polinoame într-o nedeterminată cu coeficienți într-un corp comutativ</li> <li>➤ Stabilirea gradului sumei și a produsului a două polinoame de grade diferite</li> </ul>	<p><u>Resurse materiale :</u> Tabla, caietele elevilor, <u>fișa de lucru 1</u></p> <p><u>Resurse procedurale:</u> explicatia, conversatia euristica , exercitiul activității frontale și individuale</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Observația sistematică a elevilor</li> <li>❖ Aprecierea verbală</li> <li>❖ Verificarea notițelor elevilor</li> </ul>
	C6.2	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Determinarea valorii unui polinom într-un punct</li> </ul>	<p>Tema pentru acasă :exercițiile din fișă rămase nerezolvate</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Discutarea răspunsurilor oferite de elevi</li> </ul>

		<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Exerciții de calcul al sumei și produsului a două polinoame, respectiv a produsului dintre un polinom și un scalar</li> </ul>		
3. Teorema împărțirii cu rest, împărțirea polinoamelor. 1 oră	C1  C3.2  C5.2  C6.2	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Enunțarea Teoremei împărțirii cu rest</li> <li>➤ Exerciții de determinare a restului unei împărțiri utilizând teorema împărțirii cu rest</li> <li>➤ Introducerea algoritmului de împărțire a două polinoame</li> <li>➤ Exerciții de determinare a câtului și restului împărțirii a două polinoame utilizând algoritmul de împărțire.</li> <li>➤ Aflarea câtului și restului împărțirii lui <math>f</math> la <math>g</math> prin metoda coeficienților nedeterminați</li> </ul>	<p><u>Resurse materiale :</u> manual , <u>fișă de lucru 2</u></p> <p><u>Resurse procedurale:</u> explicatia, conversatia euristica , exercitiul Tema pentru acasă : restul exercițiilor din fișa de lucru</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Verificarea prin sondaj a temei de acasă</li> <li>❖ Observația sistematică a elevilor</li> <li>❖ Aprecierea răspunsurilor primite</li> </ul>
4. Împărțirea cu $X$ – a Schema lui Horner 1 oră	C1  C3.2  C5.2  C6.1  C6.2	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Prezentarea procedurii de determinare a câtului și restului folosind schema lui Horner</li> <li>➤ Stabilirea condiției necesare aplicării schemei lui Horner</li> <li>➤ Utilizarea schemei învățate pentru aflarea câtului, restului sau a unor parametri reali</li> <li>➤ Rezolvarea de probleme și situații-problemă</li> </ul>	<p><u>Resurse materiale :</u> manual ,tabla culegere de probleme</p> <p><u>Resurse procedurale:</u> explicatia, conversatia euristica , exercitiul</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Verificarea prin sondaj a temei de acasă</li> <li>❖ Observația sistematică a elevilor</li> <li>❖ Autoevaluarea</li> <li>❖ Aprecierea răspunsurilor primite</li> </ul>

		<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Analiza rezolvării unei probleme din punctul de vedere al corectitudinii, al simplității și al clarității</li> </ul>	activități frontale și individuale Tema pentru acasă	
5.Divizibilitate, teorema lui Bézout. 1 oră	C1             C3.2             C6.2             C6.1	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Identificarea asemănarilor între relația de divizibilitate din mulțimea numerelor întregi cu cea de divizibilitate în inelul polinoamelor</li> <li>➤ Introducerea noțiunilor de relație de divizibilitate în inele de polinoame, a divizorilor proprii și improprii</li> <li>➤ Prezentarea proprietăților relației de divizibilitate în inelul polinoamelor</li> <li>➤ Enunțarea teoremei lui Bézout</li> <li>➤ Utilizarea teoremei lui Bézout în aflarea parametrilor apăruiți în scrierea unui polinom</li> <li>➤ Determinarea unor parametri reali știind că două polinome sunt divizibile</li> <li>➤ Rezolvarea de probleme date în anii anteriori la Bacalaureat</li> </ul>	<u>Resurse materiale :</u> manual , tabla, <u>fișă de lucru 3</u>  <u>Resurse procedurale:</u> explicatia, conversatia euristica , exercitiul, demonstrația activități frontale și individuale  Tema pentru acasă : restul exercițiilor din fișa de lucru	<ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Verificarea prin sondaj a temei de acasă</li> <li>❖ Observația sistematică a elevilor aprecierea verbală</li> <li>❖ Evaluarea prin sondaj</li> <li>❖ Aprecierea răspunsurilor primite</li> </ul>

<p>6.C.m.m.d.c și c.m.m.m.c pentru polinoame 1 oră</p>	<p>C1  C3.2  C1  C6.2  C6.1</p>	<p>➤ Definirea c.m.m.d.c și c.m.m.m.c.pentru două polinoame</p> <p>➤ Introducerea algoritmului lui Euclid pentru determinarea unui c.m.m.d.c. a două polinoame</p> <p>➤ Definirea polinoamelor prime între ele</p> <p>➤ Exerciții de determinare a c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c</p> <p>➤ Imaginarea și folosirea creativă a unor reprezentări variate pentru depășirea unor dificultăți</p>	<p><u>Resurse materiale :</u> Tabla, manual , culegere de probleme</p> <p><u>Resurse procedurale:</u> explicatia, conversatia euristică , exercitiul activității frontale și individuale</p> <p>Tema pentru acasă</p>	<p>❖ Corectarea temei la tablă(dacă este cazul)</p> <p>❖ Observația sistematică a elevilor</p> <p>❖ Aprecierea răspunsurilor primite</p>
<p>7.Descompunerea unui polinom în factori ireductibili 1 oră</p>	<p>C1  C3.2  C5.2  C6.1</p>	<p>➤ Definirea polinoamelor reductibile peste un corp comutativ</p> <p>➤ Aplicarea teoremei de descompunere în factori ireductibili a polinoamelor de grad mai mare sau egal decât 1</p> <p>➤ Exerciții de descompunere în factori ireductibili a unor polinoame</p> <p>➤ Identificarea de metode diferite de rezolvare a unor descompuneri în factori</p>	<p><u>Resurse materiale :</u> manual , caietele elevilor, culegere de probleme</p> <p><u>Resurse procedurale:</u> explicatia, conversatia euristică , exercitiul,</p>	<p>❖ Corectarea temei la tablă(dacă este cazul)</p> <p>❖ Observația sistematică a elevilor</p> <p>❖ Aprecierea răspunsurilor primite</p>

		<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Folosirea particularizării, a generalizării sau analogiei pentru rezolvarea de probleme noi, pornind de la o proprietate sau problemă dată</li> </ul>	investigația științifică	
8.Rădăcini ale polinoamelor. 1 oră	C1  C3.2  C6.2	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Reactualizarea noțiunii de rădăcină a unui polinom cu coeficienți într-un corp comutativ</li> <li>➤ Introducerea noțiunii de ordin de multiplicitate a unei rădăcini (simplă, dublă, triplă, etc)</li> <li>➤ Exerciții de determinare a ordinului de multiplicitate cu ajutorul schemei lui Horner sau a derivatei formale a unui polinom</li> <li>➤ Aplicarea noțiunii de multiplicitate a unei rădăcini pentru determinarea parametrilor reali</li> </ul>	<p><u>Resurse materiale :</u> manual ,<u>fișă de lucru 4</u></p> <p><u>Resurse procedurale:</u> explicatia, conversatia euristica , exercitiul</p> <p>Tema pentru acasă :exercițiile rămase nerezolvate din fișa de lucru</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Verificarea prin sondaj a temei de acasă</li> <li>❖ Observația sistematică a elevilor</li> <li>❖ Discutarea răspunsurilor oferite de elevi</li> </ul>
9.Relatiile lui Viète (pentru polinoame de grad cel mult 4) 1 oră	C1  C3.2  C5.2	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Reactualizarea și demonstrarea relațiilor lui Viète pentru o ecuație de gradul al II-lea</li> <li>➤ Identificarea relațiilor între rădăcinile și coeficienții unui polinom (relațiile lui Viète) de gradul II, III sau IV</li> <li>➤ Utilizarea în termeni logici a unei rezolvări de probleme</li> </ul>	<p><u>Resurse materiale :</u> manual ,<u>fișă de lucru 5</u></p> <p><u>Resurse procedurale:</u> explicatia,</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Aprecirea răspunsurilor primite</li> <li>❖ Verificarea prin sondaj a temei de acasă</li> <li>❖ Observația sistematică a</li> </ul>

	C6.2	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Folosirea relațiilor lui Viète în aflarea sumei pătratelor sau cuburilor rădăcinilor unui polinom cu coeficienți într-un corp comutativ</li> </ul>	<p>conversația euristică , exercitiul, problematizarea</p>	elevilor aprecierea verbală
	C6.1	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Reformularea unei probleme echivalente sau înrudite</li> </ul>	<p>Tema pentru acasă :exercițiile rămase nerezolvate din fișa de lucru</p>	
10. Polinoame. Aplicații. 1 oră	C1	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Analiza secvențelor logice în etapele de rezolvare a unei probleme</li> </ul>	<p><u>Resurse materiale :</u> Tabla, manual, <u>fișa de lucru 6</u></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Verificarea prin sondaj a temei de acasă</li> </ul>
	C3.2	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Aplicarea noțiunii de multiplicitate a unei rădăcini pentru determinarea parametrilor reali</li> </ul>	<p><u>Resurse procedurale:</u> explicatia, conversația euristică , exercitiul, rezolvarea de probleme</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Observația sistematică a elevilor</li> </ul>
	C6.1	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Redactarea unor demonstrații folosind terminologia adecvată</li> <li>➤ Formarea deprinderilor de aplicare a relațiilor lui Viète</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Discutarea răspunsurilor oferite de elevi</li> </ul>
	C6.2	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Rezolvarea de probleme și situații-problemă</li> </ul>	<p>Tema pentru acasă :exercițiile rămase nerezolvate din fișa de lucru</p>	
11. Evaluare 1 oră	C1	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Prezentarea testului sumativ</li> </ul>		

	C5.2	➤ Evaluare sumativă a unității de învățare	<u>Resurse materiale :</u> foi de scris, <u>testul sumativ</u>  <u>Resurse procedurale:</u> explicatia, exercițiul , rezolvarea de probleme	❖ Administrarea testului
	C6.1	➤ Utilizarea formulelor standardizate în înțelegerea ipotezei		❖ Activitate individuală
	C6.2	➤ Folosirea unor repere standard sau a unor formule standard în rezolvarea de probleme		
<u>12. Oră remedială</u> <u>1 oră</u>	C3.2	➤ Discutarea testului sumativ	<u>Resurse materiale :</u> Tabla, testul sumativ, testele elevilor  <u>Resurse procedurale:</u> explicatia, conversatia euristica , exercitiul, demonstrația	❖ Corectarea testului sumativ
	C6.2	➤ Exprimarea rezultatelor în limbaj matematic  ➤ Analiza rezolvării unor probleme din punctul de vedere al corectitudinii și al semnificației rezultatelor		❖ Discutarea răspunsurilor primite de elevi



**Clasa a XII-a – M2 (profil tehnologic) 3 ore/săptămână**  
**Unitatea de învățare: Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ**  
**Lecția L1: Forma algebrică a unui polinom, operații cu polinoame**

*Fișa de lucru 1*

- 1) a) Se consideră polinomul :  $f \in \mathbb{R}[X], f = -2X^4 + X^3 - 4X^2 + 3X - 1$ .  
Calculați :  $f(1), f(-1), f(2), f(-3)$
- b) Se consideră polinomul :  $f \in \mathbb{C}[X], f = X^4 - 2X^2 + 9$ . Calculați:  $f(\sqrt{2} + i)$
- c) Se consideră polinomul  $f \in \mathbb{Z}_5[X], f = 3X^5 + 3X^3 + 3X + 4$ .  
Calculați:  $f(\hat{0}) + f(\hat{1})$
- d) Fie polinoamele  $f, g \in \mathbb{R}[X], f = 4X^3 - 2X^2 + X - 1$  și  $g = 2X^2 - 4X + 5$ .  
Calculați:  $2f + 2g, f \cdot g, f(2) - g(2)$ .
- 2) a) Se consideră polinomul:  $f \in \mathbb{R}[X], f = 2X^5 - 5X + a$ . Să se determine parametrul real  $a$ , pentru care  $f(2) = 0$ .
- b) Se consideră polinomul:  $f \in \mathbb{R}[X], f = -X^3 + aX + b$ . Să se determine parametrii reali  $a$  și  $b$ , pentru care  $f(-1) = -2$  și  $f(2) = -8$
- 3) a) Să se determine polinomul  $f \in \mathbb{R}[X], \text{grad} f = 1$ , știind că:  $f(-1) = 8$  și  $f(2) = -1$ .
- b) Să se determine polinomul  $f \in \mathbb{R}[X], \text{grad} f = 2$ , știind că:  $f(1) = 0, f(0) = 1$  și  $f(2) = 5$ .

**Clasa a XII-a – M2 (profil tehnologic) 3 ore/săptămână**

**Unitatea de învățare: Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ**

**Lecția : Împărțirea cu rest a polinoamelor**

**Fișa de lucru 2**

**I. Încercuți varianta corectă:**

1. Fie polinoamele  $f, g \in \mathbb{R}[X]$ ,  $f = X^{100} + 3X^{98} - X^2 + X + 1$  și  $g = X^2 - 1$ . Determinând restul împărțirii polinomului  $f$  la polinomul  $g$ , obținem:

- a)  $r = X + 4$ ;      b)  $r = 0$ ;      c)  $r = 2X + 1$ ;      d)  $r = X$

2. Aflați  $a, b \in \mathbb{C}$  astfel încât polinomul  $f = X^4 + aX^3 + bX + 1$  împărțit la polinomul  $g = X^2 + X + 1$  să dea restul  $r = X + i$ .

- a)  $a = 1$  și  $b = i$ ;      b)  $a = i + 1$  și  $b = 0$ ;      c)  $a = 2i + 31$  și  $b = i$ ;      d)  $a = i - 1$  și  $b = 0$ ;

II. Determinați câtul și restul împărțirii polinomului  $f$  la  $g$ , în fiecare din cazurile de mai jos, apoi asociați fiecărui enunț din coloana A, rezultatul corespunzător din coloana B.

**Coloana A**

**Coloana B**

- |   |  |
|---|--|
| 1. $f = 3X^5 + X^3 + 2X + 4$ și $g = X^3 + 3X^2 + 1; f, g \in \mathbb{R}[X]$ ,      | a) $q = 4X^2 + 4X + 2, r = 4$                  |
| 2. $f = 3X^5 - 4X^3 + 2X^2 + 7X - 8$ și $g = X^2 - X + 2; f, g \in \mathbb{Q}[X]$ , | b) $q = 3X^2 - 9X + 28, r = -87X^2 + 11X - 24$ |
| 3. $f = 5X^4 + 2X^3 - 3X^2 + 2X + 1$ și $g = X^2 + 3X + 3; f, g \in \mathbb{Z}[X]$  | c) $q = 5X^2 - 13X + 21, r = -22X - 62$        |
| 4. $f = 2X^5 + 3X^3 + 4X + 1$ și $g = 4X^3 + X^2 + 2; f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$     | d) $q = 3X^2 + 3X, r = 4X^2 + 3X + 1$          |
| 5. $f = 2iX^3 + (1 + i)X^2 + 5X - i$ și $g = X^2 - iX + 1; f, g \in \mathbb{C}[X]$  | e) $q = 3X^3 + 3X^2 - 7X - 11, r = 10X + 14$   |
| 6. $f = 3X^4 + 2X^3 + X^2 + 3$ și $g = 2X^2 + X + 2; f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$      | f) $q = 5X^2 + 4X, r = X + 1$                  |
|   | g) $q = 2iX - 1 + i, r = (4 - 3i)X + 1 - 2i$   |

**III. Scrieți rezolvările complete:**

1. Determinați polinomul  $f \in \mathbb{R}[X]$ , știind că prin împărțire la  $X^2 + 1$ , se obține câtul  $X^2 - X + 1$  și restul  $X - 1$ .

Fie polinoamele  $f, g \in \mathbb{R}[X]$ ,  $f = X^3 + X^2 - X + 2$  și  $g = X^2 + 2$ . Folosind teorema împărțirii cu rest, determinați câtul și restul împărțirii polinomului  $f$  la polinomul  $g$ .

2. Fie polinoamele  $f, g \in \mathbb{Z}[X]$ ,  $f = 6X^3 - 7X^2 + 3X + 2$  și  $g = 2X^2 - 3X + 2$ .

Determinați câtul și restul împărțirii polinomului  $f$  la polinomul  $g$ , folosind metoda coeficienților nedeterminați.

3. Fie polinoamele  $f, g \in \mathbb{Z}_7[X]$ ,  $f = 6X^4 + 2X^3 + 5X^2 + mX + n$  și  $g = 5X^2 + 2X + 4$ . Să se determine parametrii  $m, n \in \mathbb{Z}_7$  astfel încât prin împărțirea polinomului  $f$  la polinomul  $g$  să se obțină restul  $r = 2X + 3$ .

4. Să se determine polinomul cu coeficienți raționali, de grad minim, care împărțit la  $X^2 + X - 2$  dă restul  $2X + 13$  și împărțit la  $X^2 - X + 2$  dă restul  $2X - 3$

*Fișă de lucru 3*

- 1) Se consideră polinomul  $f = X^3 - 2X^2 + 1$ 
  - a) Arătați că  $f(1) = 0$
  - b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului  $f$  la polinomul  $g = X^2 - 2X + 1$  (BAC 2013)
- 2) Arătați că polinomul  $f = X^2 - 2X + 1$  este divizibil cu  $X - 1$ . Aflați câtul împărțirii.
- 3) Arătați că polinomul  $f = X^3 - 9X^2 - X + 9$  este divizibil cu  $X^2 - 1$ .
- 4) Se consideră polinomul  $f = X^3 - 4X - 1$ 
  - a) Calculați  $f(0) + f(1)$
  - b) Arătați că  $f + 1$  este divizibil cu  $X^2 - 4$
- 5) Se consideră polinomul  $f = X^3 + 2X^2 - X - 2$ 
  - a) Calculați  $f(0) + f(1)$
  - b) Arătați că  $f$  este divizibil cu  $X^2 - 1$
- 6) Aflați  $a \in R$  pentru care polinomul  $f = X^2 + a$  este divizibil cu  $X + 2$
- 7) Aflați  $m \in R$  pentru care polinomul  $f = X^3 + mX^2 + 4$  este divizibil cu  $X - 2$
- 8) Se consideră polinomul  $f = X^3 + 2X^2 - 5X + m$ 
  - a) Aflați  $m \in R$  pentru care polinomul  $f$  este divizibil cu  $X - 1$
  - b) Pentru  $m = 2$  aflați câtul împărțirii lui  $f$  la  $X - 1$
- 9) Fie  $f = X^4 + X^3 + X^2 + X - 4$ 
  - a) Arătați că  $f$  este divizibil cu  $X - 1$
  - b) Calculați  $f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(2014)$
- 10) Fie  $f = (X - 1)^{2014} + (X - 2)^{2014}$ . Arătați că  $f$  nu este divizibil nici cu  $X - 1$ , nici cu  $X - 2$ .

*FISĂ DE LUCRU 4*

**Abia așteptați (știu!) să rezolvați următoarele exerciții.**

- 1) Să se arate că polinomul  $f$  are rădăcinile indicate în cazurile:
  - a)  $f \in R[X], f = X^3 - 4X^2 + 3X + 2, x_0 = 2;$
  - b)  $f \in Q[X], f = X^4 + 3X^3 - 5X^2 - 9X + 10, x_0 = -2;$
  - c)  $f \in Q[X], f = 2X^4 - 5X^3 + 4X^2 + X - 1, x_0 = \frac{1}{2};$
  - d)  $f \in Z_5[X], f = X^4 + \hat{3}X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{4}X - \hat{1}, x_0 = \hat{2}.$
- 2) Să se determine parametrii pentru care  $\alpha$  este soluție a polinoamelor:
  - a)  $f = 3X^3 - 4X^2 + mX + 1, f \in R[X], \alpha = 2;$
  - b)  $f = X^4 + mX^2 - 2m^2, f \in C[X], \alpha = i;$
  - c)  $f = X^3 + mX + \hat{1}, f \in Z_3[X], \alpha = \hat{2};$
  - d)  $f = (m^2 - 3)X^4 + 2mX^3 + 5X^2 + (m - 1)X + 2, f \in R[X], \alpha = 2;$
  - e)  $f = X^3 + mX^2 - mX - 4, f \in R[X], \alpha = \sqrt{2}.$
- 3) Determinați rădăcinile polinomului  $f$  și precizați ordinul lor de multiplicitate, dacă  $f = (X - 2)^4(X + 1)^2(X + 3)(X + 1 - i)(X - 1 + i) \in C[X].$
- 4) Să se determine ordinul de multiplicitate al rădăcinii  $x_0$  pentru polinoamele:
  - a)  $f = X^5 - 3X^4 - X^3 + 11X^2 - 12X + 4 \in R[X], x_0 = 1;$
  - b)  $f = X^4 + 4X^3 + 3X^2 - 4X - 4 \in R[X], x_0 = -2;$
  - c)  $f = X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{1} \in Z_3[X], x_0 = \hat{1}.$
- 5) Fie  $f = X^4 - 8X^3 + 23X^2 - 28X + 12$ . Determinați ordinul de multiplicitate a rădăcinii 2 a polinomului  $f$ . Scrieți descompunerea în factori de gradul întâi a polinomului  $f$ .
- 6) Fie  $f = aX^4 + bX^3 + 1 \in Q[X]$ . Să se determine  $a, b \in Q$  astfel încât  $f : (X - 1)^2$ .
- 7) Să se determine parametrii reali  $a, b$  și  $c$  astfel încât polinomul  $f = X^4 + (a - 1)X^3 + (b + 2)X^2 + X + c - 3$  să admită rădăcina triplă  $x = 1$ .
- 8) Formulați o problemă asemănătoare problemei 7) și rezolvați-o utilizând derivatele unui polinom.
- 9) Să se determine parametrii reali  $a$  și  $b$  astfel încât polinomul  $f = X^4 + 6X^3 + 8X^2 - aX + b$  are rădăcina dublă  $x = -3$ . Să se determine celelalte rădăcini.

**Nu vă necăjiți prea tare dacă nu am avut timp să le rezolvăm pe toate!  
Siguri le veți termina singuri, acasă. Succes!**

## FIȘĂ DE LUCRU 5

### EXERSARE

1. Fie  $x_1, x_2, x_3$  rădăcinile polinomului  $f = x^3 - 3x^2 + 2x - 3$ . Demonstrați că:  
 $x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2x_3 = 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)$ .
2. Se consideră polinomul  $f = x^4 - (m + 1)x^3 + 2x^2 - mx + 3, m \in \mathbb{R}$ , iar  $x_1, x_2, x_3, x_4$  rădăcinile sale. Determinați valoarea lui  $m$ , dacă:  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2023$ .
3. Fie  $f = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \in \mathbb{R}[X]$ . Dacă notăm cu  $x_1, x_2, x_3$  rădăcinile polinomului, să se calculeze:

$$S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

4. Fie  $f = x^3 - 2x^2 - 2x + a \in \mathbb{R}[X]$ . Determinați numărul real  $a$ , dacă rădăcimile sale  $x_1, x_2, x_3$  verifică relația:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{2}.$$

5. Fie polinomul  $f = x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \in \mathbb{R}[X]$ . Dacă notăm cu  $x_1, x_2, x_3$  rădăcinile sale, să se calculeze determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ x_2 & x_3 & 1 \\ x_3 & x_1 & 1 \end{vmatrix}.$$

### APROFUNDARE

1. Fie  $f = 8x^3 - 6x^2 - 3x + 1 \in \mathbb{C}[X]$ . Să se determine rădăcinile polinomului  $f$  știind că ele sunt în progresie aritmetică.
2. Fie  $f = x^4 - x^3 - mx^2 - x + n \in \mathbb{C}[X]$ . Să se determine parametrii reali  $m$  și  $n$  astfel încât polinomul  $f$  să aibă rădăcină dublă pe 1 și apoi să se găsească și celelalte două rădăcini.
3. Să se afle rădăcinile polinomului  $f = 3x^3 + 7x^2 - 18x + 8$  știind că între rădăcinile sale există relația:  $x_1 + x_2 = -3$ .
4. Fie  $f = x^3 - 6x^2 + 12x - m \in \mathbb{C}[X]$ . Fie  $x_1, x_2, x_3$  rădăcinile sale, demonstrați că:  
 $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = 0$ .
5. Se consideră polinomul  $f = x^3 - 6x^2 + 12x - m \in \mathbb{C}[X]$ . Să se afle numărul real  $m$ , dacă toate rădăcinile polinomului sunt reale.
6. Fie  $f = mx^3 - 6x^2 + 3x - 1 \in \mathbb{C}[X]$ ,  $m$  număr real nenul. Fie  $x_1, x_2, x_3$  rădăcinile sale
  - a. Demonstrați că  $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} = \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right)^2 - \frac{2(x_1+x_2+x_3)}{x_1x_2x_3}$ .
  - b. Demonstrați că valoarea expresiei  $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2}$  nu depinde de  $m$ .
  - c. Demonstrați că polinomul  $f$  nu are toate rădăcinile reale.

*Fișă de lucru 6*

1. Să se calculeze câtul și restul împărțirii polinomului  $f = 4X^5 - 2X^4 + 5X^2 - X + 9$  la polinomul  $g = X^2 - 3X + 4$ ,  $f, g \in \mathbf{R}[X]$ .
2. Fie polinoamele  $f, g \in \mathbf{R}[X]$ ,  $f = 4X^4 - 3X^3 - 2X^2 + X - 10$  și  $g = X + 3$ . Folosind schema lui Horner să se calculeze câtul și restul împărțirii polinomului  $f$  la polinomul  $g$ .
3. Fie polinoamele  $f, g \in \mathbf{R}[X]$ ,  $f = 3X^4 - 4X^3 + 2X^2 + X - 5$  și  $g = X + 2$ . Folosind schema lui Horner să se calculeze câtul și restul împărțirii polinomului  $f$  la polinomul  $g$ .
4. Să se determine în funcție de parametrul real  $m$ , gradul polinomului  $f = (m-1)X^3 + (m^2 - 1)X^2 - 3X + 1$ .
5. Să se determine în funcție de parametrul real  $m$ , gradul polinomului  $f = (m^2 - 5m + 6)X^4 + (m^2 - 4)X^3 - (m - 2)X^2 + 3X + 2$ .
6. Determinați  $m, n \in \mathbf{R}$  știind că polinomul  $f = X^4 + (2m+n)X^3 + (m-n)X + 1$  se divide cu  $(X + 1)^2$ .
7. Determinați  $m, n \in \mathbf{R}$  știind că polinomul  $f = X^4 + (2m+n)X^3 + (m-n)X + 1$  se divide cu  $(X - 1)^2$ .
8. Fie  $f \in C[X]$ . Știind că  $f(1) = 6$ ,  $f(-1) = 4$  și  $f(-2) = 7$  determinați restul împărțirii polinomului  $f$  la polinomul  $(X^2 - 1)(X + 2)$ .
9. Fie  $f \in C[X]$ . Știind că  $f(-1) = 4$ ,  $f(1) = 1$  și  $f(2) = 7$ . Determinați restul împărțirii polinomului  $f$  la polinomul  $(X^2 - 1)(X - 2)$ .
10. Se consideră polinomul  $f = X^4 - 4X^3 + 7X^2 - 16X + 12$ .
  - a) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului  $f$  prin  $X^2 - 4X + 3$ .
  - b) Să se descompună polinomul  $f$  în produs de polinoame ireductibile peste  $\mathbf{R}$  și peste  $\mathbf{C}$ .
  - c) Să se rezolve ecuația  $f(3^x) = 0$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
11. Se consideră polinomul  $f = X^4 - 3X^3 + 11X^2 - 27X + 18$ .

- d) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului  $f$  prin  $X^2 - 3X + 2$ .
- e) Să se descompună polinomul  $f$  în produs de polinoame ireductibile peste  $\mathbf{R}$  și peste  $\mathbf{C}$ .
- f) Să se rezolve ecuația  $f(2^x) = 0$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
12. Se consideră polinomul  $f = X^8 + 4X^4 + 3$ ,  $f \in \mathbf{Z}_5[X]$ .
- a) Arătați că polinomul  $f$  nu are rădăcini în  $\mathbf{Z}_5$ .
- b) Demonstrați că polinomul  $f$  este reductibil peste  $\mathbf{Z}_5$ .
13. Se consideră polinomul  $f = 2X^8 + 3X^4 + 1$ ,  $f \in \mathbf{Z}_5[X]$ .
- a) Arătați că polinomul  $f$  nu are rădăcini în  $\mathbf{Z}_5$ .
- b) Demonstrați că polinomul  $f$  este reductibil peste  $\mathbf{Z}_5$ .

**TEST DE EVALUARE – INELE DE POLINOAME  
CLASA a XII-a (Filiera tehnologică -3 ore/săpt.)**

**MATRICEA DE SPECIFICAȚII**

<b>Competențe de evaluat</b>	<b>C1</b>	<b>C3.2</b>	<b>C5.2</b>	<b>C6.2</b>	<b>TOTAL</b>
<b>Conținuturi</b>					
<b>Forma algebrică a unui polinom. Operații.</b>	1.(5 p)			3.(10 p)	<b>15 p</b>
<b>Valoarea numerică a unui polinom</b>			11.(5 p)	2.(5 p)	<b>10 p</b>
<b>Teorema împărțirii cu rest</b>			4.(10 p)		<b>10 p</b>
<b>Împărțirea cu X-a. Schema lui Horner</b>		5.(10 p)			<b>10 p</b>
<b>Divizibilitatea polinoamelor. Teorema lui Bezout</b>		9.(10 p) 10.a)(5 p)	6.(10 p)		<b>25 p</b>
<b>Descompunerea unui polinom în factori ireductibili</b>				8.(5 p)	<b>5 p</b>
<b>Rădăcinile unui polinom</b>			7.(5 p)		<b>5 p</b>
<b>Relațiile lui Viete</b>				10.b) (10 p)	<b>10 p</b>
<b>Total</b>	<b>5 p</b>	<b>25 p</b>	<b>30 p</b>	<b>30 p</b>	<b>90p</b>

**COMPETENȚELE DE EVALUAT ASOCIATE TESTULUI DE EVALUARE:**

- C1.** Recunoașterea mulțimilor de polinoame.
- C3.2.** Aplicarea unor algoritmi în calculul polinomial sau în rezolvarea ecuațiilor algebrice.
- C5.2.** Determinarea unor polinoame sau ecuații algebrice care îndeplinesc condiții date.
- C6.2.** Aplicarea, prin analogie, în calcule cu polinoame, a metodelor de lucru din aritmetica numerelor.



**TEST EVALUARE – INELE DE POLINOAME**  
**CLASA a XII-a (Filiera tehnologică -3 ore/săpt.)**

**Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**

**Timpul efectiv de lucru: 50 minute**

- (5p) 1. Să se scrie sub formă algebrică polinomul  $f = (X + \hat{3})^2 + (\hat{3}X + \hat{1})^2 \in Z_5[X]$ .
- (5p) 2. Se dă polinomul  $f \in R[X]$ , unde  $f = 2X^3 + 3X^2 - 5X - 4$ . Să se calculeze media aritmetică a numerelor  $f(-1)$  și  $f(2)$ .
- (10p) 3. Să se calculeze  $f + g, f - g$  și  $\hat{2}f - g$  în inelul  $Z_3[X]$  știind că  $f = X^2 + X + \hat{1}$ ,  
 $g = X^3 - X^2 + X - \hat{1}$ .
- (10p) 4. Fie polinoamele cu coeficienți reali  $f = 4X^3 - 6X^2 - aX + b, g = X^2 - X + 2$ .  
Să se determine  $a, b \in R$  astfel încât restul împărțirii lui  $f$  la  $g$  să fie  $-15X + 3$ .
- (10p) 5. Se consideră polinoamele  $f, g \in R[X]$ , unde  $f = X^4 + 4X^3 - 9X^2 - 35X - 7$  și  
 $g = X - 3$ . Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului  $f$  la  $g$ .
- (10p) 6. Fie polinoamele cu coeficienți reali  $f = 2X^3 - 4X^2 + (3m + 1)X + m^2$  și  
 $g = X - 1$ . Să se determine  $m \in R$  astfel încât restul împărțirii lui  $f$  la  $g$  să fie  $-1$ .
- (5p) 7. Se consideră polinomul  $f \in R[X]$ , unde  $f = X^3 + 5X^2 - 6X + m, m \in R$ . Care este  
valoarea parametrului real  $m$  știind că  $x = -1$  este rădăcină a polinomului  $f$ ?
- (5p) 8. Să se descompună polinomul  $f = X^3 - 2X^2 - 2X + 4$  în factori ireductibili peste  
 $R[X]$ .
- (10p) 9. Să se arate că polinomul  $f$  se divide cu polinomul  $g$  în cazul  
 $f, g \in Z_5[x], f = \hat{2}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{4}X + \hat{2}, g = X + \hat{2}$ .
10. Se consideră polinomul  $f \in R[X], f = X^3 - 4X^2 + 3X + 2$ .
- (5p) a) Să se arate că  $f$  este divizibil cu  $X - 2$ .
- (10p) b) Să se calculeze  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$ , unde  $x_1, x_2, x_3$  sunt rădăcinile polinomului  $f$ .
- (5p) 11. Fie polinomul cu coeficienți reali  $f = X^3 - (a - 2)X^2 - X + 4$ . Pentru  $a = 3$ , să  
se calculeze  $(1 - x_1) \cdot (1 - x_2) \cdot (1 - x_3)$ .

## BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. item	Soluție	Punctaj acordat
1.	$f = X^2 + X + \hat{4} + \hat{4}X^2 + X + \hat{1} =$	3 p
	$= \hat{2}X$	2 p
2.	$f(-1) = -2 + 3 + 5 - 4 = 2$	2 p
	$f(2) = 16 + 12 - 10 - 4 = 14$	2 p
	$M_a = \frac{2 + 14}{2} = 8$	1 p
3.	$f + g = X^3 + \hat{2}X$	3 p
	$f - g = \hat{2}X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{2}$	3 p
	$\hat{2}f - g = \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{2} - X^3 + X^2 - X + \hat{1} =$	2 p
	$= \hat{2}X^3 + X$	2 p
4.	$q = 4X - 2, r = (-a - 10)X + b + 4$	5 p
	$(-a - 10)X + b + 4 = -15X + 3$	1 p
	$-10 - a = -15 \Rightarrow a = 5$	2 p
	$b + 4 = 3 \Rightarrow b = -1$	2 p
5.	Aplicând schema lui Horner sau algoritmul de împărțire, se obține: $q = X^3 + 7X^2 + 12X + 1$	5 p
	$r = -4$	5 p
6.	$f(1) = -1$	3 p
	$2 - 4 + 3m + 1 + m^2 = -1 \Rightarrow m^2 + 3m = 0 \Rightarrow m(m + 3) = 0 \Rightarrow$	5 p
	$m_1 = 0$ și $m_2 = -3$	2 p
7.	$f(-1) = 0 \Rightarrow$	3 p
	$-1 + 5 + 6 + m = 0 \Rightarrow m = -10$	2 p
8.	$f = X^2(X - 2) - 2(X - 2) =$	2 p
	$= (X - 2)(X^2 - 2) = (X - 2)(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$	3 p
9.	$f(-\hat{2}) = f(\hat{3}) = \hat{2} \cdot \hat{2} + \hat{3} \cdot \hat{4} + \hat{4} \cdot \hat{3} + \hat{2} =$	6 p
	$\hat{4} + \hat{2} + \hat{2} + \hat{2} = \hat{0} \Rightarrow f : g$	4 p

10. a)	$f(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 2 =$	3 p
	$= 8 - 16 + 6 + 2 = 0 \Rightarrow f : (X - 2)$	2 p
10. b)	$x_1 + x_2 + x_3 = 4; x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3; x_1x_2x_3 = -2$	6 p
	$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_1x_2x_3} =$	3 p
	$= -\frac{3}{2}$	1 p
11.	$f = X^3 - X^2 - X + 4$	1 p
	$(1 - x_1) \cdot (1 - x_2) \cdot (1 - x_3) = f(1) =$	2 p
	$= 1 - 1 - 1 + 4 = 3$	2 p