LICEUL TEHNOLOGIC „ COSTACHE CONACHI”, LOCALITATEA PECHEA, JUDEȚUL GALAȚI

Profesori: ARMENCEA MONA, ATANASIU GINA, COSTIN SILVIA SĂNDICA

Clasa a XII-a, filiera tehnologică An școlar: 2023-2024

Disciplina: Matematică – Algebră Nr. de ore/ săptămână: 3

**Proiectul unităţii de învăţare**

**INELE DE POLINOAME CU COEFICIENȚI ÎNTR-UN CORP COMUTATIV**

***COMPETENŢE SPECIFICE:***

*C1*. *Recunoaşterea mulţimilor de polinoame*

*C3.2. Aplicarea unor algoritmi în calculul polinomial sau în rezolvarea ecuaţiilor algebrice*

*C5.2 Determinarea unor polinoame sau ecuaţii algebrice care îndeplinesc condiţii date*

*C6.1 Exprimarea unor probleme practice folosind calcul polinomial*

*C6.2 Aplicarea prin analogie, în calcule cu polinoame a metodelor de lucru din aritmetica numerelor*

**Nr. ore alocate: 12 ORE**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **CONŢINUTURI- detaliate**  **ale unităţii de învăţare** | **COMPETENŢE**  **SPECIFICE**  **vizate** | **ACTIVITĂŢI DE ÎNVĂŢARE** | **RESURSE** | **EVALUARE** |
| 1.Forma algebrică a unui polinom  1 oră | C1  C5.2 | * Introducerea noțiunii de polinom cu coeficienți într-un corp comutativ K. * Prezentarea formei algebrice a unui polinom, identificarea coeficienților, stabilirea gradului unui polinom, polinoame egale. * Exprimarea, prin simboluri specifice, a relațiilor matematice dintr-o problemă * Exerciții de aflare a unor parametri în funcție de gradul polinomului * Stabilirea gradului unui polinom în functie de anumiți parametri | *Resurse materiale :*  Tabla,  manual ,  culegere de probleme  *Resurse procedurale:* explicatia,  conversatia euristica , exercitiul  activități frontale și individuale  Tema pentru acasă | * Observația sistematică a elevilor * Aprecierea verbală * Aprecierea răspunsurilor primite |
| 2.Operaţii cu polinoame(adunarea, înmulţirea, înmulţirea cu un scalar)  1 oră | C3.2  C6.2 | * Definirea operațiilor de adunare, înmulțirea a două sau mai multe polinoame, înmulțirea unui polinom cu un scalar * Identificarea proprietăților adunării și înmulțirii polinoamelor cu coeficienți într-un corp comutativ * Definirea noțiunii de inel de polinoame într-o nedeterminată cu coeficienți într-un corp comutativ * Stabilirea gradului sumei și a produsului a două polinoame de grade diferite * Determinarea valorii unui polinom într-un punct * Exerciții de calcul al sumei și produsului a două polinoame, respectiv a produsului dintre un polinom și un scalar | *Resurse materiale :*  Tabla, caietele elevilor, *fișa de lucru 1*  *Resurse procedurale:* explicatia,  conversatia euristica , exercitiul  activități frontale și individuale  Tema pentru acasă :exercițiile din fișă rămase nerezolvate | * Observația sistematică a elevilor * Aprecierea verbală * Verificarea notițelor elevilor * Discutarea răspunsurilor oferite de elevi |
| 3.Teorema împărţirii cu rest, impărţirea polinoamelor.  1 oră | C1  C3.2  C5.2  C6.2 | * Enunțarea Teoremei împărțirii cu rest * Exerciții de determinare a restului unei împărțiri utilizând teorema împărțirii cu rest * Introducerea algoritmului de împărţire a două polinoame * Exerciții de determinare a câtului și restului împărțirii a două polinoame utilizând algoritmul de împărțire. * Aflarea câtului și restului împărțirii lui f la g prin metoda coeficienților nedeterminați | *Resurse materiale :*  manual ,  *fișă de lucru 2*  *Resurse procedurale:* explicatia,  conversatia euristica , exercitiul  Tema pentru acasă : restul exercițiilor din fișa de lucru | * Verificarea prin sondaj a temei de acasă * Observația sistematică a elevilor * Aprecierea răspunsurilor primite |
| 4.Împărţirea cu X – a Schema lui Horner  1 oră | C1  C3.2  C5.2  C6.1  C6.2 | * Prezentarea procedeului de determinare a câtului și restului folosind schema lui Horner * Stabilirea condiției necesare aplicării schemei lui Horner * Utilizarea schemei învățate pentru aflarea câtului, restului sau a unor parametri reali * Rezolvarea de probleme și situații-problemă * Analiza rezolvării unei probleme din punctul de vedere al corectitudinii, al simplității și al clarității | *Resurse materiale :*  manual ,tabla  culegere de probleme  *Resurse procedurale:* explicatia,  conversatia euristica , exercitiul  activități frontale și individuale  Tema pentru acasă | * Verificarea prin sondaj a temei de acasă * Observația sistematică a elevilor * Autoevaluarea * Aprecierea răspunsurilor primite |
| 5.Divizibilitate, teorema lui Bézout.  1 oră | C1  C3.2  C6.2  C6.1 | * Identificarea asemănărilor între relația de divizibilitate din mulțimea numerelor întregi cu cea de divizibilitate în inelul polinoamelor * Introducerea noțiunilor de relație de divizibilitate în inele de polinoame, a divizorilor proprii și improprii * Prezentarea proprietăților relației de divizibilitate în inelul polinoamelor * Enunțarea teoremei lui Bézout * Utilizarea teoremei lui Bézout în aflarea parametrilor apăruți în scrierea unui polinom * Determinarea unor parametri reali știind că două polinome sunt divizibile * Rezolvarea de probleme date în anii anteriori la Bacalaureat | *Resurse materiale :*  manual , tabla,  *fișă de lucru 3*  *Resurse procedurale:* explicatia,  conversatia euristica , exercitiul, demonstrația  activități frontale și individuale  Tema pentru acasă : restul exercițiilor din fișa de lucru | * Verificarea prin sondaj a temei de acasă * Observația sistematică a elevilor aprecierea verbală * Evaluarea prin sondaj * Aprecierea răspunsurilor primite |
| 6.C.m.m.d.c şi c.m.m.m.c pentru polinoame  1 oră | C1  C3.2  C1  C6.2  C6.1 | * Definirea c.m.m.d.c și c.m.m.m.c.pentru două polinoame * Introducerea algoritmului lui Euclid pentru determinarea unui c.m.m.d.c. a două polinoame * Definirea polinoamelor prime între ele * Exerciții de determinare a c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c * Imaginarea și folosirea creativă a unor reprezentări variate pentru depășirea unor dificultăți | *Resurse materiale :*  Tabla, manual ,  culegere de probleme  *Resurse procedurale:* explicatia,  conversatia euristica , exercitiul  activități frontale și individuale  Tema pentru acasă | * Corectarea temei la tablă(dacă este cazul) * Observația sistematică a elevilor * Aprecierea răspunsurilor primite |
| 7.Descompunerea unui polinom în factori ireductibili  1 oră | C1  C3.2  C5.2  C6.1 | * Definirea polinoamelor reductibile peste un corp comutativ * Aplicarea teoremei de descompunere în factori ireductibili a polinoamelor de grad mai mare sau egal decât 1 * Exercitii de descompunere în factori ireductibili a unor polinoame * Identificarea de metode diferite de rezolvare a unor descompuneri în factori * Folosirea particularizării, a generalizării sau analogiei pentru rezolvarea de probleme noi, pornind de la o proprietate sau problemă dată | *Resurse materiale :*  manual , caietele elevilor,  culegere de probleme  *Resurse procedurale:* explicatia,  conversatia euristică , exercitiul, investigația științifică | * Corectarea temei la tablă(dacă este cazul) * Observația sistematică a elevilor * Aprecierea răspunsurilor primite |
| 8.Rădăcini ale polinoamelor.  1 oră | C1  C3.2  C6.2 | * Reactualizarea noțiunii de rădăcină a unui polinom cu coeficienți într-un corp comutativ * Introducerea noțiunii de ordin de multiplicitate a unei rădăcini (simplă, dublă, triplă, etc) * Exerciții de determinare a ordinului de multiplicitate cu ajutorul schemei lui Horner sau a derivatei formale a unui polinom * Aplicarea noțiunii de multiplicitate a unei rădăcini pentru determinarea parametrilor reali | *Resurse materiale :*  manual ,*fișă de lucru 4*  *Resurse procedurale:* explicatia,  conversatia euristică , exercitiul  Tema pentru acasă :exercițiile rămase  nerezolvate din fișa de lucru | * Verificarea prin sondaj a temei de acasă * Observația sistematică a elevilor * Discutarea răspunsurilor oferite de elevi |
| 9.Relaţiile lui Viète (pentru polinoame de grad cel mult 4)  1 oră | C1  C3.2  C5.2  C6.2  C6.1 | * Reactualizarea și demonstrarea relațiilor lui Viete pentru o ecuație de gradul al II-lea * Identificarea relațiilor între rădăcinile și coeficienții unui polinom (relațiile lui Viete) de gradul II, III sau IV * Utilizarea în termeni logici a unei rezolvări de probleme * Folosirea relațiilor lui Viete în aflarea sumei pătratelor sau cuburilor rădăcinilor unui polinom cu coeficienți într-un corp comutativ * Reformularea unei probleme echivalente sau înrudite | *Resurse materiale :*  manual ,  *fișă de lucru 5*  *Resurse procedurale:* explicatia,  conversatia euristică , exercitiul, problematizarea  Tema pentru acasă :exercițiile rămase  nerezolvate din fișa de lucru | * Aprecirea răspunsurilor primite * Verificarea prin sondaj a temei de acasă * Observația sistematică a elevilor aprecierea verbală |
| 10.Polinoame.Aplicaţii.  1 oră | C1  C3.2  C6.1  C6.2 | * Analiza secvențelor logice în etapele de rezolvare a unei probleme * Aplicarea noțiunii de multiplicitate a unei rădăcini pentru determinarea parametrilor reali * Redactarea unor demonstrații folosind terminologia adecvată * Formarea deprinderilor de aplicare a relațiilor lui Viète * Rezolvarea de probleme și situații- problemă | *Resurse materiale :*  Tabla, manual, *fișa de lucru 6*  *Resurse procedurale:* explicatia,  conversatia euristica , exercitiul, rezolvarea de probleme  Tema pentru acasă :exercițiile rămase  nerezolvate din fișa de lucru | * Verificarea prin sondaj a temei de acasă * Observația sistematică a elevilor * Discutarea răspunsurilor oferite de elevi |
| **11. Evaluare**  **1 oră** | C1  C5.2  C6.1  C6.2 | * Prezentarea testului sumativ * Evaluare sumativă a unităţii de învăţare * Utilizarea formulelor standardizate în înțelegerea ipotezei * Folosirea unor repere standard sau a unor formule standard în rezolvarea de probleme | *Resurse materiale :*  foi de scris, *testul sumativ*  *Resurse procedurale:* explicatia,  exercițiul , rezolvarea de probleme | * Administrarea testului * Activitate individuală |
| **12. Oră remedială**  **1 oră** | C3.2  C6.2 | * Discutarea testului sumativ * Exprimarea rezultatelor în limbaj matematic * Analiza rezolvării unor probleme din punctul de vedere al corectitudinii și al semnificației rezultatelor | *Resurse materiale :*  Tabla, testul sumativ, testele elevilor  *Resurse procedurale:* explicatia,  conversatia euristica , exercitiul, demonstrația | * Corectarea testului sumativ * Discutarea răspunsurilor primite de elevi |

**Clasa a XII-a – M2 (profil tehnologic) 3 ore/săptămână**

**Unitatea de învățare: Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ**

**Lecția L1: Forma algebrică a unui polinom, operații cu polinoame**

***Fișa de lucru 1***

1. a) Se consideră polinomul : . Calculați :
2. Se consideră polinomul : . Calculați:
3. Se consideră polinomul .

Calculați:

1. Fie polinoamele **și** .

Calculati: .

1. a) Se consideră polinomul: . Să se determine parametrul real *a* , pentru care .

Se consideră polinomul: . Să se determine parametrii

reali *a* și b, pentru care și

3) a) Să se determine polinomul , ştiind că: și .

b) Să se determine polinomul, ştiind că: și

.

**Clasa a XII-a – M2 (profil tehnologic) 3 ore/săptămână**

**Unitatea de învățare: Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ**

**Lecția : Împărțirea cu rest a polinoamelor**

***Fișa de lucru 2***

1. **Încercuiți varianta corectă:**

1. Fie polinoamele, . Determinând restul împărţirii polinomului *f* la polinomul *g*, obținem:

1. ; b) ; c) ; d)

2. Aflaţi astfel încât polinomul împărţit la polinomul să dea restul .

1. ; b) ; c) ; d) ;
2. Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la g , în fiecare din cazurile de mai jos , apoi asociați fiecărui enunț din coloana A , rezultatul corespunzător din coloana B .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Coloana A |  | Coloana B |
| 1. | ;, | a) |  |
| 2. | ;, | b) |  |
| 3. | ; | c) |  |
| 4. | ; | d) |  |
| 5. | ; | e) |  |
| 6. | ; | f) |  |
|  |  | g) |  |

1. **Scrieți rezolvările complete:**

1. Determinați polinomul , ştiind că prin împărţire la, se obtine câtul şi restul .

Fie polinoamele ,. Folosind teorema împărțirii cu rest, determinați câtul şi restul împărțirii polinomului *f* la polinomul *g*.

2. Fie polinoamele,.

Determinați câtul şi restul împărțirii polinomului *f* la polinomul *g*, folosind metoda coeficienților nedeterminați.

3.Fie polinoamele , . Să se determine parametrii astfel încât prin împărţirea polinomului *f* la polinomul *g* să se obţină restul .

4.Să se determine polinomul cu coeficienţi raţionali, de grad minim, care împărţit la dă restul şi împărţit la dă restul

**Clasa a XII-a – M2 (profil tehnologic) 3 ore/săptămână**

**Unitatea de învățare: Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ**

**Lecția : Divizibilitatea polinoamelor**

***Fișă de lucru 3***

1. Se consideră polinomul f= 
2. Arătați că f(1)=0
3. Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul

 (BAC 2013)

1. Arătați că polinomul  este divizibil cu . Aflati câtul împărțirii.
2. Arătați că polinomul este divizibil cu .
3. Se consideră polinomul 
4. Calculați f(0)+f(1)
5. Arătați că f+1 este divizibil cu 
6. Se consideră polinomul
7. Calculați f(0)+f(1)
8. Arătați că f este divizibil cu 
9. Aflați pentru care polinomul  este divizibil cu
10. Aflați  pentru care polinomul  este divizibil cu 
11. Se consideră polinomul 
12. Aflați  pentru care polinomul este divizibil cu 
13. Pentru aflați câtul împărțirii lui la 
14. Fie 
15. Arătați că f este divizibil cu
16. Calculați 
17. Fie  . Arătați că f nu este divizibil nici cu , nici cu .

Clasa a XII-a, M2, filiera tehnologică

Unitatea de învățare: INELE DE POLINOAME CU COEFICIENȚI ÎNTR-UN CORP COMUTATIV

Lecția: Rădăcini ale polinoamelor

*FIȘĂ DE LUCRU 4*

**Abia așteptați (știu!) să rezolvați următoarele exerciții.**

1. Să se arate că polinomul *f* are rădăcinile indicate în cazurile:
2. ;
3. Să se determine parametrii pentru care α este soluție a polinoamelor:
4. ;
5. ;
6. .
7. Determinați rădăcinile polinomului *f* și precizați ordinul lor de multiplicitate, dacă

.

1. Să se determine ordinul de multiplicitate al rădăcinii pentru polinoamele:
2. ;
3. ;
4. .
5. Fie . Determinați ordinul de multiplicitate a rădăcinii 2 a polinomului *f*. Scrieți descompunerea în factori de gradul întâi a polinomului *f*.
6. Fie Să se determine astfel încât .
7. Să se determine parametrii reali *a*, *b* și *c* astfel încât polinomul să admită rădăcina triplă .
8. Formulați o problemă asemănătoare problemei 7) și rezolvați-o utilizând derivatele unui polinom.
9. Să se determine parametrii reali *a* și *b* astfel încât polinomul are rădăcina dublă . Să se determine celelalte rădăcini.

**Nu vă necăjiți prea tare dacă nu am avut timp să le rezolvăm pe toate!**

**Sigur le veți termina singuri, acasă. Succes!**

Clasa a XII-a, M2, filiera tehnologică

Unitatea de învățare: INELE DE POLINOAME CU COEFICIENȚI ÎNTR-UN CORP COMUTATIV

Lecția: Relațiile lui Viete

FIȘĂ DE LUCRU 5

EXERSARE

1. Fie x1, x2, x3 rădăcinile polinomului . Demonstrați că:

x1 + x2 + x3 + x1x2x3 = 3(x1x2 + x2x3 + x1x3).

1. Se consideră polinomul iar x1 , x2 , x3 , x4 rădăcinile sale. Determinați valoarea lui *m*, dacă: x1 + x2 + x3 + x4 = 2023.
2. Fie Dacă notăm cu x1, x2, x3 rădăcinile polinomului, să se calculeze:
3. Fie Determinați numărul real *a*, dacă rădăcimile sale x1, x2, x3 verifică relația:
4. Fie polinomul Dacă notăm cu x1, x2, x3 rădăcinile sale, să se calculeze determinantul:

APROFUNDARE

1. Fie Să se determine rădăcinile polinomului *f* știind că ele sunt în progresie aritmetică.
2. Fie Să se determine parametrii reali *m* și *n* astfel încât polinomul *f* să aibă rădăcină dublă pe 1 și apoi să se găsească și celelalte două rădăcini.
3. Să se afle rădăcinile polinomului știind că între rădăcinile sale există relația: x1 + x2 = - 3.
4. Fie Fie x1, x2, x3 rădăcinile sale, demonstrați că:
5. Se consideră polinomul . Să se afle numărul real *m*, dacă toate rădăcinile polinomului sunt reale.
6. Fie , *m* număr real nenul. Fie x1, x2, x3 rădăcinile sale
7. Demonstrați că
8. Demonstrați că valoarea expresiei nu depinde de *m*
9. Demonstrați că polinomul *f* nu are toate rădăcinile reale.

**Clasa a XII-a – M2 (profil tehnologic) 3 ore/săptămână**

**Unitatea de învățare: Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ**

**Lecția : Polinoame. Aplicații**

***Fișă de lucru 6***

1. Să se calculeze câtul şi restul împărţirii polinomului la polinomul *,* .
2. Fie polinoamele , și . Folosind schema lui Horner să se calculeze câtul şi restul împărţirii polinomului  *f* la polinomul *g.*
3. Fie polinoamele , și . Folosind schema lui Horner să se calculeze câtul şi restul împărţirii polinomului  *f* la polinomul *g.*
4. Să se determine în funcţie de parametrul real m, gradul polinomului .
5. Să se determine în funcţie de parametrul real m, gradul polinomului .
6. Determinaţi  ştiind că polinomul  se divide cu .
7. Determinaţi  ştiind că polinomul  se divide cu .
8. Fie . Știind că ,  și determinaţi restul împărțirii polinomului *f* la polinomul .
9. Fie . Știind că ,  și . Determinaţi restul împărțirii polinomului *f* la polinomul .
10. Se consideră polinomul.
11. Să se determine câtul şi restul împărțirii polinomului *f* prin.
12. Să se descompună polinomul *f* în produs de polinoame ireductibile peste **R** și peste **C**.
13. Să se rezolve ecuaţia , .
14. Se consideră polinomul.
15. Să se determine câtul şi restul împărțirii polinomului *f* prin.
16. Să se descompună polinomul *f* în produs de polinoame ireductibile peste **R** și peste **C**.
17. Să se rezolve ecuaţia , .
18. Se consideră polinomul , .
19. Arătați că polinomul *f*  nu are rădăcini în .
20. Demonstrați că polinomul *f* este reductibil peste .
21. Se consideră polinomul , .
22. Arătați că polinomul *f* nu are rădăcini în .
23. Demonstrați că polinomul *f* este reductibil peste .

**TEST DE EVALUARE – INELE DE POLINOAME**

**CLASA a XII-a** **(Filiera tehnologică -3 ore/săpt.)**

**MATRICEA DE SPECIFICAŢII**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Competenţe de**  **evaluat**  **Conţinuturi** | **C1** | **C3.2** | **C5.2** | **C6.2** | **TOTAL** |
| **Forma algebrică a unui polinom. Operații.** | 1.(5 p) |  |  | 3.(10 p) | **15 p** |
| **Valoarea numerică a unui polinom** |  |  | 11.(5 p) | 2.(5 p) | **10 p** |
| **Teorema împărțirii cu rest** |  |  | 4.(10 p) |  | **10 p** |
| **Împărțirea cu X-a. Schema lui Horner** |  | 5.(10 p) |  |  | **10 p** |
| **Divizibilitatea polinoamelor. Teorema lui Bezout** |  | 9.(10 p)  10.a)(5 p) | 6.(10 p) |  | **25 p** |
| **Descompunerea unui polinom în factori ireductibili** |  |  |  | 8.(5 p) | **5 p** |
| **Rădăcinile unui polinom** |  |  | 7.(5 p) |  | **5 p** |
| **Relațiile lui Viete** |  |  |  | 10.b)  (10 p) | **10 p** |
| **Total** | **5 p** | **25 p** | **30 p** | **30 p** | **90p** |

**COMPETENŢELE DE EVALUAT ASOCIATE TESTULUI DE EVALUARE:**

**C1.** Recunoașterea mulțimilor de polinoame.

**C3.2.** Aplicarea unor algoritmi în calculul polinomial sau în rezolvarea ecuațiilor algebrice.

**C5.2.** Determinarea unor polinoame sau ecuații algebrice care îndeplinesc condiții date.

**C6.2.** Aplicarea, prin analogie, în calcule cu polinoame, a metodelor de lucru din aritmetica numerelor.

**TEST EVALUARE – INELE DE POLINOAME**

**CLASA a XII-a (Filiera tehnologică -3 ore/săpt.)**

**Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**

**Timpul efectiv de lucru: 50 minute**

(5p) 1. Să se scrie sub formă algebrică polinomul .

(5p) 2. Se dă polinomul . Să se calculeze media

aritmetică a numerelor .

(10p) 3. Să se calculeze în inelul știind că

(10p) 4. Fie polinoamele cu coeficienți reali .

Să se determine astfel încât restul împărțirii lui *f* la *g* să fie .

(10p) 5. Se consideră polinoamele , unde și

. Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la g.

(10p) 6. Fie polinoamele cu coeficienţi reali și

. Să se determine astfel încât restul împărțirii lui f la g să fie -1.

(5p) 7. Se consideră polinomul , unde . Care este

valoarea parametrului real *m* știind că este rădăcină a polinomului f ?

(5p) 8. Să se descompună polinomul în factori ireductibili peste

.

(10p) 9. Să se arate că polinomul *f* se divide cu polinomul *g* în cazul

.

10. Se consideră polinomul +2.

(5p) a) Să se arate că *f* este divizibil cu

(10p) b) Să se calculeze unde sunt rădăcinile polinomului *f*.

(5p) 11. Fie polinomul cu coeficienți reali Pentru , să

se calculeze .

**BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE**

* **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim**

**corespunzător.**

* **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Nr.  item | Soluție | Punctaj  acordat |
| 1. |  | 3 p |
|  | 2 p |
| 2. |  | 2 p |
|  | 2 p |
|  | 1 p |
| 3. |  | 3 p |
|  | 3 p |
|  | 2 p |
|  | 2 p |
| 4. |  | 5 p |
|  | 1 p |
|  | 2 p |
|  | 2 p |
| 5. | Aplicând schema lui Horner sau algoritmul de împărţire, se obţine: | 5 p |
|  | 5 p |
| 6. |  | 3 p |
|  | 5 p |
|  | 2 p |
| 7. |  | 3 p |
|  | 2 p |
| 8. |  | 2 p |
|  | 3 p |
| 9. |  | 6 p |
|  | 4 p |
| 10. a) |  | 3 p |
|  | 2 p |
| 10. b) |  | 6 p |
|  | 3 p |
|  | 1 p |
| 11. |  | 1 p |
|  | 2 p |
|  | 2 p |