EVALUARE

Matematică - Filiera tehnologică
Clasa a XII-a

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1. Calculați $\log_2 8 + \sqrt[3]{-1}$.
2. Calculați $f(f(1))$ știind că $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}. f(x) = x^2 + 2x - 3$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(x+3) = \log_5(3x-1)$.
4. Calculați probabilitatea ca alegând un element n din mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

acesta să verifice inegalitatea $\sqrt{n} \leq 1{,}5$.

5. Determinați numărul real pozitiv a pentru care vectorii $\vec{v} = 2\vec{i} + a\vec{j}$ și $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$ au aceeași lungime.
6. Determinați diametrul cercului circumscris ΔABC cu AB=3, AC =4 și BC=5.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ unde a este un număr real.
   a) Calculați det A(2).
   b) Determinați numărul real x pentru care det (A(1)-xA(2)+A(3))=0.
   c) Arătați că det (A(1)+A(2)+...+A(100))=495000.
2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$.
   a) Calculați $0 \circ 1$.
   b) Demonstrați că $x \circ y = (x+3)(y+3) - 3$.
   c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x \circ x = 5$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}. f(x) = 4x^3 - 12x + 1$.
   a) Arătați că $f'(x) = 12(x+1)(x-1), x \in \mathbb{R}$.
   b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcției f.
   c) Demonstrați că $f(2012) + f(2014) \leq f(2013) + f(2015)$, pentru orice $x \in (-1, \infty)$.
2. Se consideră funcția $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3}$.
   a) Arătați că $\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+3}\right) = \ln 2$.
   b) Arătați că orice primitivă a funcției f este concavă.
   c) Determinați numărul natural n pentru care $\int_0^2 f(x) = n^2 + \ln 5$.

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1	$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$	2p
	$\sqrt[3]{-1} = -1$	2p
	$\log_2 8 + \sqrt[3]{-1} = 3 - 1 = 2$	1p
2	f(1)=1+2-3=0	2p
	f(f(1)) = f(0) = -3	3p
3	x+3= 3x-1	2p
	x=2 verifică ecuația	3p
4	$p = \frac{\text{nr cazuri favorabile}}{\text{nr cazuri posibile}}$	1p
	Cazuri posibile 5	1p
	Cazuri favorabile 2	2p
	$p = \frac{2}{5}$	1p
5	$\sqrt{4 + a^2} = \sqrt{1+4} \Rightarrow a^2 + 4 = 5 \Rightarrow a = \pm 1$	3p
	a=1	2p
6	$5^2 = 3^2 + 4^2$, triunghiul este dreptunghic în A	2p
	BC este diametrul cercului, BC=5	3p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1 a)	det (A(2)) = $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1$	3p
	=1	2p
b)	A(1)- xA(2) + A(3) = $\begin{pmatrix} 2-x & 2-x \\ 2-x & 4-2x \end{pmatrix}$	2p
	det (A(1) – xA(2) + A(3)) = $2-x^2$	2p
	x=2	1p
c)	(A(1)+A(2)+...+A(100)) = $\begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 100 & 1+2+\cdots+100 \end{pmatrix}$ =	3p
	det (A(1)+A(2)+...+A(100))=495000	2p
2 a)	$0 \circ 1 = 0 + 0 + 3 + 6$	3p
	=9	2p
b)	$x \circ y = xy + 3x + 3y + 6 = x(y+3) + 3(y+3) - 3$	3p
	=(x+3)(y+3)-3	2p
c)	$x \circ x \circ x = (x+3)^3 - 3$	2p
	$(x+3)^3 = 8$	2p
	x= -1	1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1 a)	$f'(x)= 12x^2-12$	3p
	$=12 (x^2-1) = 12 (x-1) (x+1), x \in \mathbb{R}$	2p
b)	$f(1)= -7, f'(1)=0$	2p
	Ecuația tangentei este $y-f(1)= f'(1)(x-1) \Rightarrow y = -7$	3p
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x[1,\infty)$, deci f este crescătoare pe intervalul $[1,\infty)$	3p
	$f(2012) \leq f(2013)$ *și* $f(2014) \leq f(2015) \Rightarrow$ $f(2012) + f(2014) \leq f(2013) + f(2015)$	2p
2 a)	$\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+3}\right) dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx =$	2p
	$\ln(x+1)\vert_0^1 = \ln 2$	3p
b)	F este o primitivă a lui f $\Rightarrow F''(x) = f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+3)^2}$	2p
	$F''(x) < 0$ pentru orice $x \in [0,\infty) \Rightarrow$ F concavă	3p
c)	$\int_0^2 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3}\right) dx = \ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln 5$	3p
	$n^2=0 \Rightarrow n=0, n \in \mathbb{R}$	2p