

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică  $M_{tehnologic}$

Test 1

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că  $3(2 - \sqrt{20}) + \sqrt{180} = 6$ .
- 5p 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x - 1$ . Calculați  $(f \circ f)(1)$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\lg(5x - 1) = \lg 2 + \lg 7$ .
- 5p 4. După o scumpire cu 30% un obiect costă 5200 de lei. Determinați prețul inițial al obiectului.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(0,3)$ ,  $B(4,8)$  și  $C(4,0)$ . Calculați distanța de la punctul  $B$  la dreapta  $AC$ .
- 5p 6. Arătați că  $\frac{2 \cos 30^\circ}{2 \operatorname{tg} 45^\circ + 1} = \operatorname{tg} 30^\circ$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} a+1 & 2a+1 \\ a & 2a \end{pmatrix}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det(A(10)) = 10$ .
- 5p b) Demonstrați că  $(A(a) - A(b))(A(a) - A(b)) = 3(a - b)(A(a) - A(b))$ , pentru orice numere reale  $a$  și  $b$ .
- 5p c) Determinați numărul natural  $n$  pentru care  $\det(A(2)) + \det(A(3)) + \dots + \det(A(n)) = 35$ .
2. Pe mulțimea  $M = [\sqrt{2}, +\infty)$  se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru  $x * y = \sqrt{(x^2 - 2)(y^2 - 2)} + 2$ .
- 5p a) Arătați că  $4 * \sqrt{3} = 4$ .
- 5p b) Determinați simetricul elementului  $x = \sqrt{6}$ , în raport cu legea de compoziție „\*”.
- 5p c) Calculați  $\sqrt{2} * \sqrt{3} * \sqrt{4} * \dots * \sqrt{2020}$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2\sqrt{x}(\ln x - 1)$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{\sqrt{x}(\ln x + 1)}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul de abscisă  $x = \frac{1}{e}$  situat pe graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Demonstrați că  $\sqrt{e}f(x) + 4 \geq 0$ , pentru orice  $x \in (0, +\infty)$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \in (-\infty, 0] \\ \frac{3x - 1}{x + 1}, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$ .
- 5p a) Arătați că funcția  $f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p b) Calculați  $\int_1^2 f(x) dx$ .
- 5p c) Arătați că  $\int_{-1}^0 e^x f(x) dx = \frac{5 - 3e}{e}$ .

**Examenul de bacalaureat național 2020**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{tehnologic}$**

**Test 2**

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că  $\sqrt{11}(\sqrt{11}+1) - (\sqrt{11}+3) = 8$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 5x + 6$ . Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției  $f$  cu axa  $Ox$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{x^2 + 2} = 3\sqrt{3}$ .
- 5p** 4. Se consideră patru puncte distincte, oricare trei dintre ele necoliniare. Calculați numărul dreptelor determinate de câte două dintre aceste puncte.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $M(-1, 2)$  și  $N(2, 1)$ . Determinați coordonatele simetricului punctului  $M$  față de punctul  $N$ .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul  $ABC$ , cu  $AB = 3\sqrt{2}$ ,  $BC = 9$  și  $AC = 3\sqrt{5}$ . Calculați măsura unghiului  $B$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} 1-10a & 8a \\ -5a & 1+4a \end{pmatrix}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(1)) = -5$ .
- 5p** b) Demonstrați că  $A(a) \cdot A(b) = A(a+b-6ab)$ , pentru orice numere reale  $a$  și  $b$ .
- 5p** c) Determinați numerele naturale  $m$  și  $n$ , pentru care  $A(m) \cdot A(n) = A(6-5mn)$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = xy - 3x - 3y + 12$ .
- 5p** a) Arătați că  $1 * 3 = 3$ .
- 5p** b) Demonstrați că  $x * y = (x-3)(y-3) + 3$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p** c) Determinați numerele numere reale  $x$  pentru care  $x * x * x = x$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^5 - 5x + 2020$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = 5(x-1)(x+1)(x^2+1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Demonstrați că funcția  $f$  este concavă pe  $(-\infty, 0]$ .
- 5p** c) Demonstrați că ecuația  $f(x) = 2025$  nu admite nicio soluție în intervalul  $[-1, 1]$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x$ .
- 5p** a) Arătați că orice primitivă  $F$  a funcției  $f$  este crescătoare pe  $[0, \pi]$ .
- 5p** b) Calculați  $\int_2^{\frac{\pi}{3}} 2f(x)f'(x) dx$ .
- 5p** c) Arătați că  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(x) dx = 1$ .

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M\_tehnologic*

Test 3

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că  $\left(5 + \frac{1}{2}\right)\left(5 - \frac{1}{2}\right) = \frac{99}{4}$ .
- 5p 2. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x + 4$  și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 8 - x$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_5(2x + 1) = 2$ .
- 5p 4. După o ieftinire cu 10%, prețul unei tablete este 630 de lei. Determinați prețul tabletei înainte de ieftinire.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(3,1)$  și  $B(3,5)$ . Calculați lungimea segmentului  $AM$ , unde  $M$  este mijlocul segmentului  $AB$ .
- 5p 6. Arătați că  $\cos^2 45^\circ - \sin^2 30^\circ = \frac{1}{4}$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele  $M = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$  și  $A(a) = \begin{pmatrix} 2+a & 2 \\ 2 & 1+a \end{pmatrix}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det M = 4$ .
- 5p b) Arătați că  $A(a) \cdot A(-a) + a^2 \cdot I_2 = M$ , pentru orice număr real  $a$ , unde  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 5p c) Determinați matricea  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , știind că  $M \cdot X = A(0)$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = x + y - 10$ .
- 5p a) Arătați că  $5 * 5 = 0$ .
- 5p b) Determinați numerele naturale  $n$  pentru care  $n^2 * n < -4$ .
- 5p c) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $x * x * x = x^2 - 18$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = 6x(x - 1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Arătați că  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^3 + 2x^2 + x - 2}{x - 1} = 2$ .
- 5p c) Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției  $f$  în care tangenta la graficul funcției  $f$  este paralelă cu dreapta de ecuație  $y = 12x + 2020$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x(x^2 + 1) - 2$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_{-1}^1 (f(x) - x + 2) dx = 0$ .
- 5p b) Calculați  $\int_0^1 (f(x) - x^3 + 2) e^x dx$ .
- 5p c) Determinați numărul real pozitiv  $m$ , știind că  $\int_1^2 f(x) dx = m^2 + 1$ .

**Examenul de bacalaureat național 2020**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{tehnologic}$**

**Test 4**

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p 1. Arătați că  $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = 2$ .
- 5p 2. Se consideră  $x_1$  și  $x_2$  soluțiile ecuației  $x^2 - 4x + m = 0$ , unde  $m$  este număr real. Determinați numărul real  $m$  pentru care  $x_1^2 + x_2^2 = 2$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{3x+1} = 3x+1$ .
- 5p 4. După o ieftinire cu 25%, prețul unui obiect este 750 de lei. Determinați prețul obiectului înainte de ieftinire.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(0,2)$  și  $B(8,6)$ . Determinați coordonatele punctului  $C$ , știind că  $OABC$  este paralelogram.
- 5p 6. Arătați că  $\sqrt{3}\cos 30^\circ + \sin 30^\circ + \frac{1}{2}\cos 90^\circ = 2$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $M(a) = I_2 + aA$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det(M(1)) = -1$ .
- 5p b) Demonstrați că  $M(a) \cdot M(b) - M(a+b) = 2abM(0)$ , pentru orice numere reale  $a$  și  $b$ .
- 5p c) Determinați matricea  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , știind că  $X \cdot M(1) = M(0)$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = 4xy + 4x + 4y + 3$ .
- 5p a) Arătați că  $1 * (-1) = -1$ .
- 5p b) Demonstrați că  $x * y = 4(x+1)(y+1) - 1$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p c) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $x * \frac{1}{4} * (-x) = 19$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x+1}$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ ,  $x \in (-1, +\infty)$ .
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Demonstrați că funcția  $f$  este convexă.
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2+1}$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_0^1 (x^2+1)(f(x)-x^2) dx = 1$ .
- 5p b) Calculați  $\int_{-1}^1 x f(x) dx$ .
- 5p c) Determinați numărul natural  $n$ , știind că  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{n^2}{3} + \frac{\pi}{4} - 1$ .

**Examenul de bacalaureat național 2020**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{tehnologic}$**

**Test 5**

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că  $\left(3 - 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{5}{14} = 1$ .
- 5p** 2. Determinați numerele reale  $m$ , știind că punctul  $A(m, 6)$  aparține graficului funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 2$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{14-x} = \sqrt{3x+6}$ .
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr  $n$  din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să verifice inegalitatea  $n(n-10)(n-11) \leq 0$ .
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(3,1)$ ,  $B(-1,4)$  și  $C(3,7)$ . Calculați perimetrul triunghiului  $ABC$ .
- 5p** 6. Arătați că  $\sin 30^\circ \cos 30^\circ + 2 \sin 45^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \cos 60^\circ = 1$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $A(x) = \begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & 3-x \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(1)) = -5$ .
- 5p** b) Demonstrați că  $A(x) + A(-x) = 2A(0)$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p** c) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $A(x) \cdot A(x) = 10 \cdot I_2$ .
- 2) Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = 2x + y - 3xy$ .
- 5p** a) Arătați că  $1 * 2 = -2$ .
- 5p** b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $x * (x-1) = -1$ .
- 5p** c) Dați exemplu de două numere iraționale  $a$  și  $b$  pentru care  $a * b \in \mathbb{N}$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = 5x^2(x-3)(x-1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul de abscisă  $x=1$ , situat pe graficul funcției  $f$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $-27 \leq f(x) \leq 1$ , pentru orice  $x \in [0, 3]$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2, & x \in (-\infty, 0) \\ e^x + 1, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_0^1 f(x) dx = e$ .
- 5p** b) Demonstrați că funcția  $f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p** c) Calculați  $\int_{-1}^1 x f(x) dx$ .

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică  $M_{tehnologic}$

Test 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Calculați primul termen al unei progresii geometrice  $(b_n)_{n \geq 1}$  în care  $b_3 = 12$  și rația  $q = 2$ .
- 5p 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + 1$ . Determinați mulțimea valorilor reale ale lui  $x$  pentru care  $f(x) \geq f(1)$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_5(x+1) = \log_5(11-x)$ .
- 5p 4. Calculați  $C_{11}^9 - C_{11}^2$ .
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-3,4)$ ,  $B(1,0)$  și  $C(5,4)$ . Arătați că triunghiul  $ABC$  este dreptunghic isoscel.
- 5p 6. Arătați că  $\frac{\sin 135^\circ}{\cos 45^\circ} = 1$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ .
- 5p a) Arătați că  $\det A = -1$ .
- 5p b) Demonstrați că  $A \cdot A \cdot A = A$ .
- 5p c) Determinați matricea  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , astfel încât  $A \cdot X = I_2 + 3A$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = xy - 2x - 2y + 6$ .
- 5p a) Arătați că  $2 * 2020 = 2$ .
- 5p b) Demonstrați că  $x * y = (x-2)(y-2) + 2$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p c) Determinați numerele naturale  $m$  și  $n$  pentru care  $m * n = 13$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2(x-1)e^x$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = 2xe^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Calculați  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x}$ .
- 5p c) Demonstrați că  $xe^x \geq e^x - 1$ , pentru orice număr real  $x$ .
2. Se consideră funcția  $f: (-4, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+2}{x+4}$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_0^2 (x+4)f(x) dx = 6$ .
- 5p b) Calculați  $\int_{-2}^0 f(x) dx$ .
- 5p c) Demonstrați că  $\int_{-3}^a f'(x)f''(x) dx = 2 \left( \frac{1}{(a+4)^4} - 1 \right)$ , pentru orice  $a \in (-3, +\infty)$ .

Examenul de bacalaureat național 2020  
Proba E. c)

Matematică M<sub>tehnologic</sub>

Test 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că  $\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{2}{3} + 1\right) - \left(2 - \frac{4}{3}\right) = 0$ .
- 5p 2. Determinați numărul real  $m$  pentru care graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - mx + 3$  conține punctul  $A(2, 5)$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{x+4} - 2 = x$ .
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele egale.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-1, 1)$  și  $B(2, -2)$ . Determinați numărul real  $a$ , știind că punctele  $A$ ,  $B$  și  $C(4, a)$  sunt coliniare.
- 5p 6. Diagonala pătratului  $MNPQ$  are lungimea de  $6\sqrt{2}$ . Calculați perimetrul acestui pătrat.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 5p a) Arătați că  $\det(A - B) = 1$ .
- 5p b) Demonstrați că matricea  $C = A \cdot A + B \cdot B$  nu este inversabilă.
- 5p c) Determinați numerele reale  $x$  și  $y$  pentru care  $A \cdot X = X \cdot B$ , unde  $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{pmatrix}$ .
2. Pe mulțimea  $M = (0, +\infty)$  se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = \frac{xy + 1}{x + y}$ .
- 5p a) Arătați că  $1 * 1 = 1$ .
- 5p b) Determinați numărul  $x \in M$  pentru care  $x * 2 = \frac{3}{2}$ .
- 5p c) Calculați  $\lg 2 * \lg 4 * \lg 6 * \lg 8 * \lg 10$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^{2020} + 1, & x \in (0, 1] \\ \frac{x+1}{x}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$ .
- 5p a) Arătați că funcția  $f$  este continuă în  $x_0 = 1$ .
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Demonstrați că funcția  $f'$  este crescătoare pe  $(1, +\infty)$ .
2. Se consideră funcțiile  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{e^x}{x}$  și  $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = e^x \ln x$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_1^2 x f(x) dx = e(e-1)$ .
- 5p b) Calculați  $\int_e^{e^2} \frac{g(x)}{xe^x} dx$ .
- 5p c) Demonstrați că  $\int_1^e (f(x) + g(x)) dx = e^e$ .

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică  $M_{tehnologic}$

Test 8

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că  $1,75 : 0,25 - 2\left(\frac{17}{4} - 2,25\right) = 3$ .
- 5p 2. Determinați imaginea funcției  $f : [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + 1$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2(2x + 4) = 4$ .
- 5p 4. După o ieftinire cu 20%, prețul unui produs este de 144 lei. Determinați prețul produsului înainte de ieftinire.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(2, a)$  și  $B(5, 0)$ , unde  $a$  este număr real. Determinați numerele reale  $a$ , știind că segmentul  $AB$  are lungimea egală cu 5.
- 5p 6. Arătați că  $\sin^2 130^\circ + \cos^2 50^\circ = 1$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ ,  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  și  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 5p a) Arătați că  $\det A = 0$ .
- 5p b) Arătați că  $A \cdot A + A = O_2$ .
- 5p c) Demonstrați că există o infinitate de matrice  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  astfel încât  $\det X = \det(X + I_2)$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = -xy + x + y$ .
- 5p a) Arătați că  $1 \circ \sqrt{2} = 1$ .
- 5p b) Demonstrați că  $x \circ y = -(x-1)(y-1) + 1$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p c) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $3^x \circ 5^x = 1$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^4 - 2x^2 - 63$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = 4x(x-1)(x+1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul de abscisă  $x = 2$ , situat pe graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Calculați  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x^2 - 9}$ .
2. Se consideră funcțiile  $F : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \frac{x^2}{x+1}$  și  $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$ .
- 5p a) Demonstrați că funcția  $F$  este o primitivă a funcției  $f$ .
- 5p b) Calculați  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- 5p c) Determinați numărul real  $a$ ,  $a > 1$ , pentru care  $\int_1^a \frac{f(x)}{F(x)} dx = \ln \frac{8}{3}$ .

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică  $M_{tehnologic}$

Test 9

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Calculați suma primilor patru termeni ai unei progresii aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , în care  $a_1 = 2$  și  $a_4 = 11$ .
- 5p 2. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 2x$  și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 2x - 4$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt[3]{x+2} - 2 = 0$ .
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie format doar din cifre pare.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-1,5)$  și  $B(3,1)$ . Determinați coordonatele simetricului punctului  $A$  față de punctul  $B$ .
- 5p 6. Se consideră triunghiul  $ABC$  cu  $AB = 8$ ,  $AC = 6$  și  $BC = 10$ . Calculați  $\cos B$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  și  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 5p a) Arătați că  $\det(A + I_3) = 4$ .
- 5p b) Demonstrați că  $A \cdot A \cdot A + A = 2A \cdot A$ .
- 5p c) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui  $x$  pentru care matricea  $B(x) = A + xI_3$  este inversabilă.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = x + ay + 1$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $2020 * 0 = 2021$ , pentru orice număr real  $a$ .
- 5p b) Determinați numărul real  $a$ , știind că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.
- 5p c) Pentru  $a = -1$ , determinați numărul real  $x$  pentru care  $4^x * 2^x = 1$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-2}$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$ ,  $x \in (2, +\infty)$ .
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul  $x = 3$ , situat pe graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Demonstrați că funcția  $f'$  este crescătoare pe  $(2, +\infty)$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_1^e \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{f(x)} dx = 1$ .
- 5p b) Calculați  $\int_1^2 f^2(x) dx$ .
- 5p c) Demonstrați că  $\int_0^{2020} f(x) dx \leq \int_0^a f(x) dx$ , pentru orice  $a \in [2020, +\infty)$ .

**Examenul de bacalaureat național 2020**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{tehnologic}$**

**Test 10**

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că  $2,5 : 0,5 - 5 \left( 6,5 - \frac{11}{2} \right) = 0$ .
- 5p** 2. Se consideră  $x_1$  și  $x_2$  soluțiile ecuației  $x^2 + mx + 1 = 0$ , unde  $m$  este număr real. Determinați numărul real  $m$ , știind că  $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 1$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $1 + \sqrt{x-2} = 3$ .
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-4,6)$ ,  $B(4,6)$  și  $C(-4,0)$ . Determinați perimetrul triunghiului  $ABC$ .
- 5p** 6. Calculați  $\cos A$ , știind că  $A$  este unghi ascuțit astfel încât  $\sin A = \frac{4}{5}$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ .
- 5p** a) Arătați că  $\det(A + I_2) = 5$ .
- 5p** b) Arătați că  $A \cdot A = 4A$ .
- 5p** c) Demonstrați că există o infinitate de matrice  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , pentru care  $A \cdot X = X \cdot A$ .
- 2) Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = \frac{xy + x + y - 1}{2}$ .
- 5p** a) Arătați că  $1 * 2 = 2$ .
- 5p** b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui  $x$  pentru care  $x * x \leq 1$ .
- 5p** c) Calculați  $(-1) * 0 * 1 * \dots * 2020$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 2 \ln x$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p** b) Determinați intervalele de monotonie a funcției  $f$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $\ln \frac{2}{3} \leq -\frac{5}{18}$ .
2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^{2020} - 2020x + 1$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_0^1 (f(x) + 2020x - 1) dx = \frac{1}{2021}$ .
- 5p** b) Demonstrați că orice primitivă a funcției  $f$  este convexă pe  $[1, +\infty)$ .
- 5p** c) Calculați  $\int_0^1 (f(-x) - f(x)) e^x dx$ .

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M\_tehnologic*

Test 11

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că  $\frac{1}{2} : 0,5 - \frac{1}{4} : 0,25 = 0$ .
- 5p 2. Calculați  $f(-1) \cdot f(1)$ , unde  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{3x-2} = 5$ .
- 5p 4. Un obiect costă 1000 de lei. Determinați prețul obiectului după o scumpire cu 20%.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(2,3)$  și  $B(6,3)$ . Calculați distanța de la punctul  $O$  la mijlocul segmentului  $AB$ .
- 5p 6. Calculați lungimea laturii  $AB$  a triunghiului  $ABC$  dreptunghic în  $A$ , știind că  $AC = 4$  și  $B = \frac{\pi}{4}$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  și  $B(x,y) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & -1 \end{pmatrix}$ , unde  $x$  și  $y$  sunt numere reale.
- 5p a) Arătați că  $\det A = -4$ .
- 5p b) Arătați că  $\det(A - 2B(x,y)) = 0$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p c) Determinați numerele reale  $x$  și  $y$  pentru care  $A \cdot B(x,y) = B(x,y) \cdot A$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = xy + 2(x+y) + 2$ .
- 5p a) Arătați că  $2020 \circ (-2) = -2$ .
- 5p b) Demonstrați că  $x \circ y = (x+2)(y+2) - 2$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p c) Determinați numerele reale nenule  $x$  pentru care  $\frac{1}{x} \circ x = x$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + (x-1)^2$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Arătați că  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x f'(x)}{f(x)} = 3$ .
- 5p c) Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției  $f$  în care tangenta la graficul funcției  $f$  este paralelă cu dreapta  $y = 3x + 1$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^5 + x^3 + 2x + 2$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_{-1}^1 (f(x) - x^3 - 2x - 2) dx = 0$ .
- 5p b) Arătați că  $\int_0^2 e^x (f(x) - x^5 - x^3 - 3x - 1) dx = -2$ .
- 5p c) Demonstrați că orice primitivă a funcției  $f$  este convexă.

Examenul de bacalaureat național 2020  
Proba E. c)

Matematică  $M_{tehnologic}$

Test 12

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că  $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} : 0,5\right) \cdot \frac{12}{13} = 1$ .
- 5p 2. Arătați că  $2(x_1 + x_2) - x_1x_2 = 4$ , unde  $x_1$  și  $x_2$  sunt soluțiile ecuației  $x^2 - 7x + 10 = 0$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{5x+1} = 6$ .
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 11.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(6,0)$  și  $B(0,8)$ . Determinați lungimea înălțimii din vârful  $O$  al triunghiului  $AOB$ .
- 5p 6. Calculați lungimea laturii  $AB$  a triunghiului  $ABC$  dreptunghic în  $A$ , știind că  $BC = 5\sqrt{2}$  și  $m(\sphericalangle B) = 45^\circ$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  și  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 5p a) Arătați că  $\det A = 1$ .
- 5p b) Arătați că  $2A - A \cdot A = I_2$ .
- 5p c) Determinați numerele reale  $x$ ,  $y$  și  $z$ , pentru care  $A \cdot \begin{pmatrix} x-2 & y \\ z+1 & 1 \end{pmatrix} - I_2 = O_2$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = xy + x^2 + y^2 - 1$ .
- 5p a) Arătați că  $1 \circ (0 \circ 2) = 12$ .
- 5p b) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $x \circ (-x) = 3$ .
- 5p c) Determinați perechile  $(m, n)$  de numere naturale pentru care  $m \circ n = -mn$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Calculați  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$ .
- 5p c) Demonstrați că funcția  $f$  este convexă pe  $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + x^2 + 3x$ .
- 5p a) Arătați că  $\int (f(x) - x^2 - 3x) dx = 0$ .
- 5p b) Arătați că  $\int_0^1 (f(x) - x^3 - x^2) e^x dx = 3$ .
- 5p c) Se consideră funcția  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , primitiva funcției  $f$  pentru care  $F(0) = 1$ . Demonstrați că  $\int_0^1 \frac{f(x)}{F^2(x)} dx = \frac{25}{37}$ .

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M\_tehnologic*

Test 13

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că  $\sqrt{16} - \sqrt{32} + \sqrt{18} + \sqrt{2} - 2^2 = 0$ .
- 5p 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + a^2$ , unde  $a$  este număr real. Determinați numerele reale  $a$ , pentru care  $f(1) = 2$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $3^{3x+1} = 3^4$ .
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie impar.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(3,1)$  și  $B(3,7)$ . Determinați coordonatele simetricului punctului  $B$  față de punctul  $A$ .
- 5p 6. Dacă  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  și  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , arătați că  $\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $M(x) = B + xI_2$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det A = -5$ .
- 5p b) Arătați că  $A \cdot M(x) = M(x) \cdot A$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p c) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $A \cdot A - 3(A + M(x)) = I_2$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = \frac{1}{3}xy + x + y$ .
- 5p a) Arătați că  $2020 * (-3) = -3$ .
- 5p b) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $(6 * x) * 6 = 6$ .
- 5p c) Determinați numerele reale nenule  $x$  pentru care  $x * \frac{1}{x} = -3$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x(x^2 - 3) + 3$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Arătați că  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x^3}{x+1} = -3$ .
- 5p c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul de abscisă  $x = 0$ , situat pe graficul funcției  $f$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^4 + x + e^x$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_{-1}^1 (f(x) - x - e^x) dx = \frac{2}{5}$ .
- 5p b) Arătați că  $\int_1^e (f(x) - x^4 - e^x) \ln x dx = \frac{e^2 + 1}{4}$ .
- 5p c) Determinați numărul real  $a$  pentru care  $\int_0^a f(x) dx = \frac{5a^2 + 54}{10} + e^a$ .

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică  $M_{tehnologic}$

Test 14

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că  $\left(2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{15}{16} + \sqrt[3]{-8} = 0$ .
- 5p 2. Determinați numărul real  $a$ , știind că punctul  $A(4, 0)$  aparține graficului funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -x + a$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{2x+1} = 5$ .
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea  $M = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$ , acesta să fie multiplu de 6.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(3,5)$  și  $B(7,5)$ . Determinați lungimea segmentului  $OM$ , unde punctul  $M$  este mijlocul segmentului  $AB$ .
- 5p 6. Pentru  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  astfel încât  $\cos x = \frac{5}{13}$ , arătați că  $\operatorname{tg} x = \frac{12}{5}$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  și  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
- 5p a) Arătați că  $\det A = 1$ .
- 5p b) Arătați că  $B \cdot B + A = O_2$ .
- 5p c) Determinați  $x, y \in (0, +\infty)$ , pentru care  $A \cdot B + B \cdot A - (A + B) = \begin{pmatrix} \log_2 x & 0 \\ 0 & \log_3 y \end{pmatrix}$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = x + \frac{y}{5} + 1$ .
- 5p a) Arătați că  $2020 * 5 = 2022$ .
- 5p b) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $(x * x) * x = \frac{24}{5}$ .
- 5p c) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $5^x * 5^{x+1} = 11$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -x^3 + 3x + 9$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = 3(1-x)(1+x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Arătați că  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 7}{x - 2} = -9$ .
- 5p c) Demonstrați că  $f(x) \leq 11$ , pentru orice  $x \in [-1, +\infty)$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_{-1}^1 f(x) \cdot (x^2 + 1) dx = 0$ .
- 5p b) Calculați  $\int_0^1 (x^2 + 1) e^x f(x) dx$ .
- 5p c) Determinați  $a \in (0, +\infty)$  pentru care  $\int_0^a (f(x) - f(-x)) dx = \ln(2a)$ .

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M\_tehnologic*

Test 15

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că  $\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5}\right) : \frac{17}{60} = 1$ .
- 5p 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 1$ . Calculați  $f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot f(4) \cdot f(5)$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{4x-3} = 5$ .
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr  $x$  din mulțimea  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ , acesta să verifice inegalitatea  $x^2 - 2x \leq 0$ .
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(0,6)$  și  $B(6,0)$ . Arătați că triunghiul  $AOB$  este isoscel.
- 5p 6. Calculați aria triunghiului  $ABC$  dreptunghic în  $A$  cu  $AB = 6$  și  $AC = 8$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $B(x) = \begin{pmatrix} -1 & x \\ x-1 & -1 \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det(B(1)) = 1$ .
- 5p b) Arătați că  $A \cdot A - 2A = I_2$ .
- 5p c) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $A \cdot B(x) = I_2$ .
- 2) Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = xy + x + y - 2$ .
- 5p a) Arătați că  $(-1) * 2020 = -3$ .
- 5p b) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $x * (2x) = 3$ .
- 5p c) Determinați perechile  $(m, n)$  de numere naturale pentru care  $m * n = -1$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x^2 - 5x + \ln x$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{(x-1)(4x-1)}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p b) Arătați că  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{f(x)} = 0$ .
- 5p c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul de abscisă  $x = 1$ , situat pe graficul funcției  $f$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_{-1}^1 (f(x) - x^2 - x - 1) dx = 0$ .
- 5p b) Arătați că funcția  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$  este o primitivă a funcției  $f$ .
- 5p c) Determinați numerele reale  $a$  pentru care  $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2+1} \cdot e^x dx = (ae)^2 - e$ .

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M\_tehnologic*

Test 16

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că  $\log_5 5 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{5}{12} = 0$ .
- 5p 2. Determinați numărul natural  $n$  pentru care punctul  $A(n, 7)$  aparține graficului funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + x + 1$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{x^2 - 9} = x - 3$ .
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie de forma  $\overline{aa}$ , unde  $a$  este cifră nenulă.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(1,4)$ ,  $B(5,4)$  și  $C(3,0)$ . Calculați aria triunghiului  $ABC$ .
- 5p 6. Calculați măsura unghiului  $B$  al triunghiului  $ABC$  dreptunghic în  $A$ , știind că  $AC = 3$  și  $BC = 6$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
- 5p a) Arătați că  $\det A = 4$ .
- 5p b) Arătați că  $A \cdot A + 3A + 4I_2 = O_2$ .
- 5p c) Determinați numerele reale  $x$  și  $y$  astfel încât  $A \cdot A \cdot A = xA + yI_2$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = 2xy - 2x - 2y + 3$ .
- 5p a) Arătați că  $2020 * 1 = 1$ .
- 5p b) Demonstrați că  $x * y = 2(x-1)(y-1) + 1$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p c) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $(x * x) * x = x$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x^3 - 9x + 5$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = 9(x-1)(x+1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul de abscisă  $x = 1$ , situat pe graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Demonstrați că  $f(2019) + f(2021) \leq f(2020) + f(2022)$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 4$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_0^3 (f(x) + 4) dx = 9$ .
- 5p b) Calculați  $\int_0^1 \frac{1}{f(x) + 5} dx$ .
- 5p c) Determinați numărul real  $a$ ,  $a > 0$ , pentru care  $\int_{\frac{1}{a}}^a f\left(\frac{1}{x}\right) dx = -8$ .

**Examenul de bacalaureat național 2020**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{tehnologic}$**

**Test 17**

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că media geometrică a numerelor  $x = 25$  și  $y = 144$  este egală cu 60 .
- 5p** 2. Determinați numărul real  $m$  pentru care  $f(1) = 0$ , unde  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + m$  .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{x+4} = 5$  .
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , acesta să nu fie multiplu de 3 .
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-2, 4)$  și  $B(8, 4)$ . Determinați lungimea medianei din vârful  $O$  al triunghiului  $AOB$  .
- 5p** 6. Calculați  $\sin x$ , știind că  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  și  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$  și  $M(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det A = -5$  .
- 5p** b) Arătați că  $\det(A + M(-1)) = \det B$  .
- 5p** c) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $M(x) \cdot A - A \cdot M(x) = B$  .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = x + y - 90$  .
- 5p** a) Arătați că  $90 * 1 = 1$  .
- 5p** b) Demonstrați că  $(x * y) * z = x * (y * z)$ , pentru orice numere reale  $x$ ,  $y$  și  $z$  .
- 5p** c) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $(x^2) * (2x + 1) = -74$  .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 4x^3 - 12x + 11$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = 12(x-1)(x+1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  .
- 5p** b) Calculați  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - 4x^3}{x}$  .
- 5p** c) Demonstrați că  $3 \leq f(x) \leq 19$ , pentru orice  $x \in [-1, 1]$  .
2. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 5x + \frac{1}{x}$  .
- 5p** a) Arătați că  $\int_2^4 \left(f(x) - \frac{1}{x}\right) dx = 30$  .
- 5p** b) Demonstrați că funcția  $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \frac{5x^2 + 2020}{2} + \ln x$  este o primitivă a funcției  $f$  .
- 5p** c) Calculați  $\int_1^e (f(x) - 5x) \ln x dx$  .

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M\_tehnologic*

Test 18

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că  $\frac{2}{\sqrt{3}-1} - (\sqrt{3}+1) = 0$ .
- 5p 2. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției  $f$  cu axa  $Oy$ , unde  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x^2 + x + 3$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $7^{2x+1} = 7^{4-x}$ .
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie impar.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(2,3)$  și  $B(2,5)$ . Determinați lungimea segmentului  $BC$ , unde punctul  $C$  este simetricul punctului  $B$  față de punctul  $A$ .
- 5p 6. Calculați  $\sin x$ , știind că  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  și  $\cos x = \frac{3}{5}$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  și  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 5p a) Arătați că  $\det A = 0$ .
- 5p b) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $A \cdot A = xA$ .
- 5p c) Determinați numerele reale  $a$  pentru care  $\det(A + I_2) + \det(A - I_2) = \det(aI_2)$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = xy + x + y - 5$ .
- 5p a) Arătați că  $(-1) \circ 2020 = -6$ .
- 5p b) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $x \circ x = -2$ .
- 5p c) Știind că  $m$  este număr real astfel încât  $m \circ (-2) = 1 \circ (-m)$ , calculați  $m \circ (-m)$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Demonstrați că funcția  $f$  este concavă.
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + 2$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_0^1 (f(x) - 2) dx = \frac{1}{4}$ .
- 5p b) Determinați primitiva  $F$  a funcției  $f$  pentru care  $F(2) = 7$ .
- 5p c) Arătați că  $\int_0^1 e^x (f(x) - x^3 + x^2) dx = 3e - 4$ .

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M\_tehnologic*

Test 19

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că  $\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right) : \frac{14}{12} = \frac{1}{2}$ .
- 5p 2. Determinați numărul real  $a$  pentru care punctul  $A(1, 0)$  aparține graficului funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + ax + 1$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{3x-4} = \sqrt{x+20}$ .
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea  $M = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$ , acesta să fie număr par.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-2, 4)$ ,  $B(4, 4)$  și  $C(4, 8)$ . Determinați lungimea înălțimii din  $C$  a triunghiului  $ABC$ .
- 5p 6. Arătați că  $\sin x = \frac{12}{13}$ , știind că  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  și  $\cos x = \frac{5}{13}$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricile  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  și  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 5p a) Arătați că  $\det A = -2$ .
- 5p b) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $x(A+B) = C$ .
- 5p c) Determinați matricea  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  pentru care  $A \cdot B - B \cdot A = 2X + C$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$ .
- 5p a) Arătați că  $2020 \circ (-4) = -4$ .
- 5p b) Demonstrați că  $x \circ y = (x+4)(y+4) - 4$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p c) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $x \circ x = x$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 4x^3 + 6x^2 + 5$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = 12x(x+1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Calculați  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x) - 4x^3}$ .
- 5p c) Determinați intervalele de monotonie a funcției  $f$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x^3 + 4x^2$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_0^2 (f(x) - 4x^2) dx = 12$ .
- 5p b) Determinați primitiva  $F$  a funcției  $f$  pentru care  $F(0) = 2020$ .
- 5p c) Determinați numărul real  $m$ ,  $m > 1$ , știind că  $\int_1^m \frac{f(x)}{x^2} dx = \frac{17}{2}$ .

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M\_tehnologic*

Test 20

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că  $\left(2 - \frac{1}{2}\right)\left(3 - \frac{1}{3}\right)\left(4 - \frac{1}{4}\right) : 15 = 1$ .
- 5p 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 5$ . Arătați că  $f(x) - f(-x) = 0$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{4x-3} = \sqrt{2x+1}$ .
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr  $x$  din mulțimea  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ , acesta să fie soluție a ecuației  $x^2 - 3x + 2 = 0$ .
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(0,3)$  și  $B(3,0)$ . Determinați ecuația dreptei care trece prin  $O(0,0)$  și este paralelă cu dreapta  $AB$ .
- 5p 6. Calculați aria rombului  $ABCD$ , știind că  $AC = 6$  și  $BD = 4$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $B(x) = A - xI_2$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det(B(0)) = 1$ .
- 5p b) Arătați că  $A \cdot A + I_2 = O_2$ , unde  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
- 5p c) Demonstrați că  $\det(B(x)) \geq 1$ , pentru orice număr real  $x$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = xy + x + y + 4$ .
- 5p a) Arătați că  $2020 * (-1) = 3$ .
- 5p b) Demonstrați că  $x * y = (x+1)(y+1) + 3$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p c) Determinați perechile  $(m, n)$  de numere întregi pentru care  $m * n = 2$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x^4 - 4x^2 - 3$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = 8x(x-1)(x+1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul de abscisă  $x = 1$ , situat pe graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Demonstrați că  $-5 \leq f(x) \leq -3$ , pentru orice  $x \in [-1, 1]$ .
2. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - \sqrt{x}$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_1^4 (f(x) + \sqrt{x}) dx = 21$ .
- 5p b) Demonstrați că funcția  $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{2x\sqrt{x}}{3} + 2020$  este o primitivă a funcției  $f$ .
- 5p c) Arătați că  $\int_1^2 (f(x) + \sqrt{x}) e^x dx = e(2e - 1)$ .

**Examenul de bacalaureat național 2020**  
**Proba E. c)**  
**Matematică M\_tehnologic**  
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Test 1

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	$3(2 - \sqrt{20}) + \sqrt{180} = 3(2 - 2\sqrt{5}) + 6\sqrt{5} =$ $= 6 - 6\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 6$	3p 2p
2.	$f(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2$ $(f \circ f)(1) = f(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$	2p 3p
3.	$\lg(5x - 1) = \lg 14 \Rightarrow 5x - 1 = 14$ $x = 3$ , care convine	3p 2p
4.	$x + \frac{30}{100} \cdot x = 5200$ , unde $x$ este prețul inițial al obiectului $x = 4000$ de lei	3p 2p
5.	$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{d(A, BC) \cdot BC}{2} = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16$ $AC = 5$ și, cum $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{d(B, AC) \cdot AC}{2}$ , obținem $d(B, AC) = \frac{32}{5}$	2p 3p
6.	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ , $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\frac{2 \cos 30^\circ}{2 \operatorname{tg} 45^\circ + 1} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg} 30^\circ$	3p 2p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(10)) = \begin{vmatrix} 11 & 21 \\ 10 & 20 \end{vmatrix} = 11 \cdot 20 - 21 \cdot 10 =$ $= 220 - 210 = 10$	3p 2p
b)	$A(a) - A(b) = \begin{pmatrix} a-b & 2(a-b) \\ a-b & 2(a-b) \end{pmatrix} = (a-b) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , pentru orice numere reale $a$ și $b$ $(A(a) - A(b))(A(a) - A(b)) = (a-b)^2 \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 3(a-b)^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3(a-b)(A(a) - A(b))$ , pentru orice numere reale $a$ și $b$	2p 3p
c)	Pentru orice număr natural $n$ , $\det(A(n)) = n$ , deci $\det(A(2)) + \det(A(3)) + \dots + \det(A(n)) =$ $= 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} - 1$ $\frac{n(n+1)}{2} - 1 = 35$ , deci $n(n+1) = 72$ și, cum $n$ este număr natural, obținem $n = 8$	3p 2p

2.a)	$4 * \sqrt{3} = \sqrt{(4^2 - 2)(3 - 2)} + 2 = \sqrt{4^2 - 2} + 2 =$ $= \sqrt{16} = 4$	3p 2p
b)	$x * \sqrt{3} = \sqrt{3} * x = x$ , pentru orice $x \in M$ , deci $e = \sqrt{3}$ este elementul neutru al legii de compoziție „*” $t * \sqrt{6} = \sqrt{6} * t = \sqrt{3}$ , unde $t$ este simetricul lui $x = \sqrt{6}$ , deci $\sqrt{4(t^2 - 2)} + 2 = \sqrt{3}$ , de unde $t^2 = \frac{9}{4}$ și, cum $t \in M$ , obținem $t = \frac{3}{2}$ , care convine	2p 3p
c)	$\sqrt{2} * x = \sqrt{(2 - 2)(x^2 - 2)} + 2 = \sqrt{2}$ , unde $x \in M$ $\sqrt{2} * \sqrt{3} * \sqrt{4} * \dots * \sqrt{2020} = \sqrt{2} * (\sqrt{3} * \sqrt{4} * \dots * \sqrt{2020}) = \sqrt{2}$	2p 3p

**SUBIECTUL al III-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}}(\ln x - 1) + 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} =$ $= \frac{\sqrt{x} \ln x - \sqrt{x} + 2\sqrt{x}}{x} = \frac{\sqrt{x}(\ln x + 1)}{x}$ , $x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ , $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{4}{\sqrt{e}}$ Ecuația tangentei este $y - f\left(\frac{1}{e}\right) = f'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x - \frac{1}{e}\right)$ , deci $y = -\frac{4}{\sqrt{e}}$	2p 3p
c)	$f'(x) \leq 0$ , pentru orice $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ și $f'(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in \left[\frac{1}{e}, +\infty\right) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ Pentru orice $x \in (0, +\infty)$ , $f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right)$ , deci $f(x) \geq -\frac{4}{\sqrt{e}}$ , de unde obținem $\sqrt{e}f(x) + 4 \geq 0$ , pentru orice $x \in (0, +\infty)$	3p 2p
2.a)	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 = f(0) \Rightarrow$ funcția $f$ este continuă în $x = 0$ $f$ este continuă pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, +\infty) \Rightarrow f$ este continuă pe $\mathbb{R}$ , deci funcția $f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \frac{3x-1}{x+1} dx = \int_1^2 \frac{3x+3-4}{x+1} dx = \int_1^2 \left(3 - \frac{4}{x+1}\right) dx = (3x - 4 \ln(x+1)) \Big _1^2 =$ $= 6 - 4 \ln 3 - 3 + 4 \ln 2 = 3 + 4 \ln \frac{2}{3}$	3p 2p
c)	$\int_{-1}^0 e^x f(x) dx = \int_{-1}^0 e^x (2x - 1) dx = e^x (2x - 3) \Big _{-1}^0 =$ $= e^0 \cdot (-3) - e^{-1} \cdot (-5) = \frac{5 - 3e}{e}$	3p 2p

**Examenul de bacalaureat național 2020**

**Proba E. c)**

**Matematică M\_tehnologic**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Test 2

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	$\sqrt{11}(\sqrt{11}+1) - (\sqrt{11}+3) = \sqrt{11} \cdot \sqrt{11} + \sqrt{11} - \sqrt{11} - 3 =$ $= 11 - 3 = 8$	2p 3p
2.	$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$ Abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției $f$ cu axa $Ox$ sunt $x = 2$ și $x = 3$	2p 3p
3.	$x^2 + 2 = 27 \Rightarrow x^2 - 25 = 0$ $x = -5$ sau $x = 5$ , care convin	2p 3p
4.	Numărul dreptelor determinate de câte două dintre aceste puncte este egal cu $C_4^2 =$ $= \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$	2p 3p
5.	$N$ este mijlocul segmentului $MP$ , unde $P(a, b)$ este simetricul punctului $M$ față de punctul $N$ , deci $2 = \frac{-1+a}{2}$ și $1 = \frac{2+b}{2}$ $a = 5$ și $b = 0$	3p 2p
6.	$\cos B = \frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2 \cdot BC \cdot AB} =$ $= \frac{81 + 18 - 45}{2 \cdot 9 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , de unde obținem că măsura unghiului $B$ este de $45^\circ$	2p 3p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} -9 & 8 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} -9 & 8 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = (-9) \cdot 5 - (-5) \cdot 8 =$ $= -45 + 40 = -5$	3p 2p
b)	$A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} 1-10b-10a+100ab-40ab & 8b-80ab+8a+32ab \\ -5a+50ab-5b-20ab & -40ab+1+4a+4b+16ab \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 1-10(a+b-6ab) & 8(a+b-6ab) \\ -5(a+b-6ab) & 1+4(a+b-6ab) \end{pmatrix} = A(a+b-6ab)$ , pentru orice numere reale $a$ și $b$	3p 2p
c)	$A(m+n-6mn) = A(6-5mn)$ , deci $mn - m - n + 6 = 0$ $(m-1)(n-1) = -5$ și, cum $m$ și $n$ sunt numere naturale, obținem $m = 0$ , $n = 6$ sau $m = 6$ , $n = 0$	2p 3p
2.a)	$1 * 3 = 1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 - 3 \cdot 3 + 12 =$ $= 3 - 3 - 9 + 12 = 3$	3p 2p
b)	$x * y = xy - 3x - 3y + 9 + 3 =$ $= x(y-3) - 3(y-3) + 3 = (x-3)(y-3) + 3$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	3p 2p

Probă scrisă la matematică M\_tehnologic

Test 2

Barem de evaluare și de notare

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

c)	$x * x = (x-3)^2 + 3$ , $x * x * x = (x-3)^3 + 3$ , pentru orice număr real $x$	2p
	$(x-3)^3 + 3 = x$ , deci $x = 2$ , $x = 3$ sau $x = 4$	3p

**SUBIECTUL al III-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^4 - 1) =$ $= 5(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 5(x-1)(x+1)(x^2 + 1)$ , $x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$f''(x) = 20x^3$ , $x \in \mathbb{R}$ $f''(x) \leq 0$ pentru orice $x \in (-\infty, 0]$ , deci funcția $f$ este concavă pe $(-\infty, 0]$	2p 3p
c)	$f'(x) \leq 0$ , pentru orice $x \in [-1, 1] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[-1, 1] \Rightarrow f(x) \leq f(-1)$ , pentru orice $x \in [-1, 1]$ $f(-1) = 2024$ , deci $f(x) \leq 2024$ pentru orice $x \in [-1, 1]$ , deci ecuația $f(x) = 2025$ <b>nu</b> admite nicio soluție în intervalul $[-1, 1]$	2p 3p
2.a)	$F'(x) = f(x) = \sin x$ , pentru orice număr real $x$ Cum $\sin x \geq 0$ , pentru orice $x \in [0, \pi]$ , obținem $F'(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in [0, \pi]$ , deci orice primitivă $F$ a funcției $f$ este crescătoare pe $[0, \pi]$	3p 2p
b)	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2f(x)f'(x) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2 \sin x \cos x dx = \sin^2 x \Big _{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} =$ $= \sin^2 \frac{\pi}{3} - \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$	3p 2p
c)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x (-\cos x)' dx = -x \cos x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx =$ $= -\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \sin x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$	2p 3p

Probă scrisă la matematică M\_tehnologic

Test 2

Barem de evaluare și de notare

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

Examenul de bacalaureat național 2020  
Proba E. c)  
Matematică M\_tehnologic  
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$5 + \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$	2p
	$5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow \left(5 + \frac{1}{2}\right)\left(5 - \frac{1}{2}\right) = \frac{11}{2} \cdot \frac{9}{2} = \frac{99}{4}$	3p
2.	$3x + 4 = 8 - x \Leftrightarrow x = 1$ $y = 7$	3p 2p
3.	$2x + 1 = 5^2$ $x = 12$ , care convine	3p 2p
4.	$p - 10\% \cdot p = 630$ , unde $p$ este prețul tabletei înainte de ieftinire $p = 700$ de lei	3p 2p
5.	$AB = 4$ $AM = \frac{AB}{2} = 2$	2p 3p
6.	$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	2p
	$\cos^2 45^\circ - \sin^2 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$	3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det M = \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 8 \cdot 5 - 6 \cdot 6 =$ $= 40 - 36 = 4$	3p 2p
b)	$A(a) \cdot A(-a) = \begin{pmatrix} 2+a & 2 \\ 2 & 1+a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-a & 2 \\ 2 & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-a^2 & 6 \\ 6 & 5-a^2 \end{pmatrix}$ , pentru orice număr real $a$	3p
	$\begin{pmatrix} 8-a^2 & 6 \\ 6 & 5-a^2 \end{pmatrix} + a^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-a^2+a^2 & 6 \\ 6 & 5-a^2+a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = M$ , pentru orice număr real $a$	2p
c)	$\det M \neq 0$ , deci există $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$	3p
	$X = M^{-1} \cdot A(0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , obținem $X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	2p

Probă scrisă la matematică M\_tehnologic

Test 3

Barem de evaluare și de notare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

2.a)	$5 * 5 = 5 + 5 - 10 =$ $= 10 - 10 = 0$	3p 2p
b)	$n^2 + n - 10 < -4 \Leftrightarrow n^2 + n - 6 < 0 \Leftrightarrow n \in (-3, 2)$ Cum $n$ este număr natural, obținem $n = 0$ sau $n = 1$	2p 3p
c)	$x * x = 2x - 10$ , $x * x * x = 3x - 20$ , deci $3x - 20 = x^2 - 18 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$ $x = 1$ sau $x = 2$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 2(x^3)' - 3(x^2)' + (1)'$ $= 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$ , $x \in \mathbb{R}$	2p 3p
b)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^3 + 2x^2 + x - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x-1} =$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+1) = 2$	2p 3p
c)	Tangenta la graficul funcției $f$ în punctul $(a, f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y = 12x + 2020 \Leftrightarrow f'(a) = 12$ $6a(a-1) = 12 \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = -1$ sau $a = 2$	2p 3p
2.a)	$\int_{-1}^1 (f(x) - x + 2) dx = \int_{-1}^1 (x^3 + x - 2 - x + 2) dx = \int_{-1}^1 x^3 dx =$ $= \frac{x^4}{4} \Big _{-1}^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$	2p 3p
b)	$\int_0^1 (f(x) - x^3 + 2) e^x dx = \int_0^1 x e^x dx =$ $= (x-1)e^x \Big _0^1 = 0 - (-1) \cdot e^0 = 1$	2p 3p
c)	$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x^3 + x - 2) dx = \frac{x^4}{4} \Big _1^2 + \frac{x^2}{2} \Big _1^2 - 2x \Big _1^2 = \frac{13}{4}$ $m^2 + 1 = \frac{13}{4} \Rightarrow m^2 = \frac{9}{4}$ și, cum $m$ este număr real pozitiv, obținem $m = \frac{3}{2}$	3p 2p

Probă scrisă la matematică M\_tehnologic

Test 3

Barem de evaluare și de notare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

**Examenul de bacalaureat național 2020**

**Proba E. c)**

**Matematică M\_tehnologic**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Test 4**

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{6+3+2+1}{6} = \frac{12}{6} = 2$	<b>3p</b>
	$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = 2^2 - 2 = 2$	<b>2p</b>
<b>2.</b>	$x_1 + x_2 = 4, x_1 x_2 = m \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 16 - 2m$	<b>3p</b>
	$16 - 2m = 2 \Leftrightarrow m = 7$	<b>2p</b>
<b>3.</b>	$3x + 1 = (3x + 1)^2 \Rightarrow 3x(3x + 1) = 0$	<b>2p</b>
	$x = -\frac{1}{3}$ sau $x = 0$ , care convin	<b>3p</b>
<b>4.</b>	$x - \frac{25}{100} \cdot x = 750$ , unde $x$ este prețul obiectului înainte de ieftinire	<b>3p</b>
	$x = 1000$ de lei	<b>2p</b>
<b>5.</b>	$OABC$ este paralelogram, deci segmentele $OB$ și $AC$ au același mijloc	<b>2p</b>
	Punctul $M(4, 3)$ este mijlocul segmentului $OB$ , deci $x_C = 8$ și $y_C = 4$	<b>3p</b>
<b>6.</b>	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \cos 90^\circ = 0$	<b>3p</b>
	$\sqrt{3} \cos 30^\circ + \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cos 90^\circ = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$	<b>2p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$M(1) = I_2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$	<b>3p</b>
	$= 1 - 2 = -1$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$M(a) \cdot M(b) - M(a+b) = (I_2 + aA)(I_2 + bA) - (I_2 + (a+b)A) = abA \cdot A$ , pentru orice numere reale $a$ și $b$	<b>3p</b>
	Cum $A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$ și $M(0) = I_2$ , obținem $M(a) \cdot M(b) - M(a+b) = 2abM(0)$ , pentru orice numere reale $a$ și $b$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$\det M(1) \neq 0, (M(1))^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$	<b>3p</b>
	$X = M(0) \cdot (M(1))^{-1} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$	<b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$1 * (-1) = 4 \cdot 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + 3 =$	<b>3p</b>
	$= -4 + 4 - 4 + 3 = -1$	<b>2p</b>

Probă scrisă la matematică M\_tehnologic

Test 4

Barem de evaluare și de notare

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

<b>b)</b>	$x * y = 4xy + 4x + 4y + 4 - 1 =$ $= 4x(y+1) + 4(y+1) - 1 = 4(x+1)(y+1) - 1$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	<b>2p</b>
		<b>3p</b>
<b>c)</b>	$x * \frac{1}{4} = 5x + 4, (5x + 4) * (-x) = 20(1 - x^2) - 1$ , pentru orice număr real $x$	<b>3p</b>
	$20(1 - x^2) = 20$ , de unde obținem $x = 0$	<b>2p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = \frac{(2x+4)(x+1) - (x^2+4x+4)}{(x+1)^2} =$ $= \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}, x \in (-1, +\infty)$	<b>3p</b>
		<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+4x+4}{x(x+1)} = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+4}{x+1} = 3$ , deci dreapta de ecuație $y = x + 3$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției $f$	<b>2p</b>
		<b>3p</b>
<b>c)</b>	$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}, x \in (-1, +\infty)$ $f''(x) > 0$ , pentru orice $x \in (-1, +\infty)$ , deci funcția $f$ este convexă	<b>2p</b>
		<b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_0^1 (x^2+1)(f(x)-x^2) dx = \int_0^1 (x^2+1) \cdot \frac{1}{x^2+1} dx = \int_0^1 dx =$ $= x \Big _0^1 = 1 - 0 = 1$	<b>2p</b>
		<b>3p</b>
<b>b)</b>	$\int_{-1}^1 x f(x) dx = \int_{-1}^1 \left(x^3 + \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2} \ln(x^2+1)\right) \Big _{-1}^1 =$ $= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 = 0$	<b>3p</b>
		<b>2p</b>
<b>c)</b>	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \arctg x\right) \Big _0^1 = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}$ $\frac{n^2}{3} + \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow n^2 = 4$ și, cum $n$ este număr natural, obținem $n = 2$	<b>3p</b>
		<b>2p</b>

Probă scrisă la matematică M\_tehnologic

Test 4

Barem de evaluare și de notare

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

Examenul de bacalaureat național 2020  
Proba E. c)

Matematică M\_tehnologic

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\left(3 - 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{5}{14} = \left(3 - \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{5}{14} =$ $= \frac{14}{5} \cdot \frac{5}{14} = 1$	3p 2p
2.	$f(m) = 6 \Leftrightarrow m^2 + 2 = 6 \Leftrightarrow m^2 - 4 = 0$ $m = -2$ sau $m = 2$	3p 2p
3.	$14 - x = 3x + 6 \Rightarrow 4x = 8$ $x = 2$ , care convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 2 numere care verifică inegalitatea dată, deci sunt 2 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$	2p 2p 1p
5.	$AB = 5$ , $AC = 6$ , $BC = 5$ $P_{\triangle ABC} = AB + AC + BC = 5 + 6 + 5 = 16$	3p 2p
6.	$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ , $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin 30^\circ \cos 30^\circ + 2 \sin 45^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} + 2 \cdot \frac{2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 1$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 2 - 1 \cdot 1 =$ $= -4 - 1 = -5$	3p 2p
b)	$A(x) + A(-x) = \begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & 3-x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x-3 & 1 \\ 1 & 3+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} =$ $= 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 2A(0)$ , pentru orice număr real $x$	3p 2p
c)	$\begin{pmatrix} (x-3)^2 + 1 & 0 \\ 0 & 1 + (3-x)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (x-3)^2 - 9 = 0$ $x = 0$ sau $x = 6$	3p 2p
2.a)	$1 * 2 = 2 \cdot 1 + 2 - 3 \cdot 1 \cdot 2 =$ $= 2 + 2 - 6 = -2$	3p 2p

Probă scrisă la matematică M\_tehnologic

Test 5

Barem de evaluare și de notare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

b)	$x * (x-1) = 2x + (x-1) - 3x(x-1) = -3x^2 + 6x - 1$ , unde $x$ este număr real $-3x^2 + 6x - 1 = -1 \Leftrightarrow -3x(x-2) = 0$ , deci $x = 0$ sau $x = 2$	3p 2p
c)	De exemplu, $a = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și $b = -2\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $a * b = 2 \cdot \sqrt{2} + (-2\sqrt{2}) - 3 \cdot \sqrt{2} \cdot (-2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 12 = 12 \in \mathbb{N}$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 =$ $= 5x^2(x^2 - 4x + 3) = 5x^2(x-3)(x-1)$ , $x \in \mathbb{R}$	2p 3p
b)	$f(1) = 1$ , $f'(1) = 0$ Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ , adică $y = 1$	2p 3p
c)	$f'(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in [0, 1] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0, 1]$ și $f'(x) \leq 0$ , pentru orice $x \in [1, 3] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1, 3]$ $f(0) = 0$ , $f(1) = 1$ și $f(3) = -27$ , deci $-27 \leq f(x) \leq 1$ , pentru orice $x \in [0, 3]$	2p 3p
2.a)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (e^x + 1) dx = (e^x + x) \Big _0^1 =$ $= (e + 1) - (1 + 0) = e$	3p 2p
b)	Cum $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x + 2) = 2$ , $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 1) = 2$ și $f(0) = 2$ , obținem că $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ , deci funcția $f$ este continuă în $x = 0$ Cum funcția $f$ este continuă pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, +\infty)$ , obținem că $f$ este continuă pe $\mathbb{R}$ , deci funcția $f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$	3p 2p
c)	$\int_{-1}^1 x f(x) dx = \int_{-1}^0 x(x^2 + x + 2) dx + \int_0^1 x(e^x + 1) dx = \int_{-1}^0 (x^3 + x^2 + 2x) dx + \int_0^1 (xe^x + x) dx =$ $= \left( \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big _{-1}^0 + \left( xe^x - e^x + \frac{x^2}{2} \right) \Big _0^1 = -\left( \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 \right) + \left( e - e + \frac{1}{2} \right) - (-1) = \frac{7}{12}$	2p 3p

Probă scrisă la matematică M\_tehnologic

Test 5

Barem de evaluare și de notare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

Examenul de bacalaureat național 2020  
Proba E. c)

Matematică *M\_tehnologic*  
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 6

Filierea tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$b_3 = b_1 q^2 \Rightarrow b_1 = \frac{b_3}{q^2} =$ $= \frac{12}{2^2} = 3$	3p 2p
2.	$2x + 1 \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 1$ $x \in [1, +\infty)$	3p 2p
3.	$x + 1 = 11 - x \Rightarrow 2x = 10$ $x = 5$ , care convine	3p 2p
4.	$C_{11}^9 = C_{11}^{11-9} = C_{11}^2$ $C_{11}^9 - C_{11}^2 = C_{11}^2 - C_{11}^2 = 0$	3p 2p
5.	$AB = 4\sqrt{2}$ , $BC = 4\sqrt{2}$ , $AC = 8$ $AC^2 = AB^2 + BC^2$ și, cum $AB = BC$ , obținem că $\triangle ABC$ este dreptunghic isoscel	3p 2p
6.	$\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 135^\circ) = \sin 45^\circ$ $\frac{\sin 135^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = 1$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - 2 \cdot (-4) =$ $= -9 + 8 = -1$	3p 2p
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ $A \cdot A \cdot A = A \cdot (A \cdot A) = A \cdot I_2 = A$	3p 2p
c)	Matricea $A$ este inversabilă și, cum $A \cdot A = I_2$ , obținem că inversa matricii $A$ este matricea $A$ $X = A^{-1} \cdot (I_2 + 3A) \Leftrightarrow X = A \cdot (I_2 + 3A) \Leftrightarrow X = A + 3A \cdot A \Leftrightarrow X = A + 3I_2$ , deci $X = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$	2p 3p
2.a)	$2 * 2020 = 2 \cdot 2020 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2020 + 6 =$ $= -4 + 6 = 2$	3p 2p
b)	$x * y = xy - 2x - 2y + 4 + 2 =$ $= x(y - 2) - 2(y - 2) + 2 = (x - 2)(y - 2) + 2$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	3p 2p
c)	$(m - 2)(n - 2) + 2 = 13 \Leftrightarrow (m - 2)(n - 2) = 11$ Cum $m$ și $n$ sunt numere naturale, obținem $m = 3$ , $n = 13$ sau $m = 13$ , $n = 3$	2p 3p

Probă scrisă la matematică *M\_tehnologic*

Test 6

Barem de evaluare și de notare

Filierea tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 2e^x + 2(x - 1)e^x =$ $= e^x(2 + 2x - 2) = 2xe^x$ , $x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2e^x) =$ $= 2e^0 = 2$	3p 2p
c)	$f'(x) \leq 0$ , pentru orice $x \in (-\infty, 0] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și $f'(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in [0, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0, +\infty)$ Pentru orice număr real $x$ , $f(x) \geq f(0)$ , deci $f(x) \geq -2$ , de unde obținem $xe^x - e^x \geq -1$ , deci $xe^x \geq e^x - 1$ , pentru orice număr real $x$	2p 3p
2.a)	$\int_0^2 (x + 4)f(x) dx = \int_0^2 (x + 2) dx = \left( \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big _0^2 =$ $= \frac{4}{2} + 4 = 6$	3p 2p
b)	$\int_{-2}^0 f'(x) dx = \int_{-2}^0 \frac{x+2}{x+4} dx = \int_{-2}^0 \frac{x+4-2}{x+4} dx = \int_{-2}^0 \left( 1 - \frac{2}{x+4} \right) dx = (x - 2 \ln(x+4)) \Big _{-2}^0 =$ $= 0 - 2 \ln 4 - (-2) + 2 \ln 2 = 2 - 2 \ln 2$	3p 2p
c)	$\int_{-3}^a f'(x) \cdot f''(x) dx = \frac{1}{2} (f'(x))^2 \Big _{-3}^a = \frac{1}{2} (f'(a))^2 - \frac{1}{2} (f'(-3))^2$ , pentru orice $a \in (-3, +\infty)$ $f'(x) = \frac{2}{(x+4)^2}$ , deci $\int_{-3}^a f'(x) f''(x) dx = 2 \left( \frac{1}{(a+4)^4} - 1 \right)$ , pentru orice $a \in (-3, +\infty)$	3p 2p

Probă scrisă la matematică *M\_tehnologic*

Test 6

Barem de evaluare și de notare

Filierea tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

**Examenul de bacalaureat național 2020**  
**Proba E. c)**

**Matematică M\_tehnologic**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Test 7

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	$\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{2}{3} + 1\right) - \left(2 - \frac{4}{3}\right) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2+3}{3} - \frac{6-4}{3} =$ $= \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$	2p 3p
2.	$f(2) = 5 \Leftrightarrow 2^2 - 2m + 3 = 5$ $2m = 2$ , deci $m = 1$	3p 2p
3.	$x + 4 = (x + 2)^2 \Rightarrow x^2 + 3x = 0$ $x = -3$ , care nu convine sau $x = 0$ , care convine	2p 3p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 9 numere care au cifrele egale, deci sunt 9 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$	2p 2p 1p
5.	$m_{AB} = -1$ $m_{AC} = \frac{a-1}{5}$ , deci punctele $A$ , $B$ și $C$ sunt coliniare $\Leftrightarrow m_{AB} = m_{AC} \Leftrightarrow a = -4$	2p 3p
6.	$MN = 6$ $P_{MNPQ} = 4MN = 24$	2p 3p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - B) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 =$ $= 0 - (-1) = 1$	3p 2p
b)	$C = A \cdot A + B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\det C = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ , deci matricea $C$ nu este inversabilă	3p 2p
c)	$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1+x & 2+y \\ x & y \end{pmatrix}$ , $X \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ x+y & y \end{pmatrix}$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$ $\begin{pmatrix} 1+x & 2+y \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ x+y & y \end{pmatrix}$ , deci $x = 2$ și $y = 0$ , care convin	2p 3p

Probă scrisă la matematică M\_tehnologic

Test 7

Barem de evaluare și de notare

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

2.a)	$1 * 1 = \frac{1 \cdot 1 + 1}{1 + 1} =$ $= \frac{2}{2} = 1$	3p 2p
b)	$\frac{2x+1}{x+2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4x+2 = 3x+6$ $x = 4$ , care convine	3p 2p
c)	$x * 1 = 1$ , unde $x \in M$ $\lg 2 * \lg 4 * \lg 6 * \lg 8 * \lg 10 = (\lg 2 * \lg 4 * \lg 6 * \lg 8) * \lg 10 = (\lg 2 * \lg 4 * \lg 6 * \lg 8) * 1 = 1$	2p 3p

**SUBIECTUL al III-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x^{2020} + 1) = 2$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x+1}{x} = 2$ și, cum $f(1) = 2$ , obținem $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ , deci funcția $f$ este continuă în $x_0 = 1$	2p 3p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$ Dreapta de ecuație $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției $f$	3p 2p
c)	Pentru $x \in (1, +\infty)$ , $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ , deci $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ $f''(x) > 0$ , pentru orice $x \in (1, +\infty)$ , deci funcția $f'$ este crescătoare pe $(1, +\infty)$	3p 2p
2.a)	$\int_1^2 x f(x) dx = \int_1^2 e^x dx = e^x \Big _1^2 =$ $= e^2 - e = e(e - 1)$	3p 2p
b)	$\int_e^{e^2} \frac{g(x)}{x e^x} dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{x} \ln x dx = \frac{1}{2} \ln^2 x \Big _e^{e^2} =$ $= \frac{1}{2} (2^2 - 1^2) = \frac{3}{2}$	3p 2p
c)	$\int_1^e (f(x) + g(x)) dx = \int_1^e \frac{e^x}{x} dx + \int_1^e e^x \ln x dx = \int_1^e \frac{e^x}{x} dx + e^x \ln x \Big _1^e - \int_1^e \frac{1}{x} e^x dx =$ $= e^e \ln e - e^1 \ln 1 = e^e$	3p 2p

Probă scrisă la matematică M\_tehnologic

Test 7

Barem de evaluare și de notare

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

Examenul de bacalaureat național 2020  
Proba E. c)  
Matematică *M\_tehnologic*  
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 8

Filierea tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$1,75 : 0,25 - 2 \left( \frac{17}{4} - 2,25 \right) = 175 : 25 - 2(4,25 - 2,25) =$ $= 7 - 2 \cdot 2 = 3$	3p 2p
2.	Pentru orice $x \in [1,5]$ , $f(x) = y \Leftrightarrow 2x + 1 = y \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2}$ $y \in \text{Im } f \Leftrightarrow \text{există } x \in [1,5]$ astfel încât $f(x) = y \Leftrightarrow 1 \leq \frac{y-1}{2} \leq 5 \Leftrightarrow 3 \leq y \leq 11$ , deci $\text{Im } f = [3,11]$	2p 3p
3.	$2x + 4 = 2^4$ $x = 6$ , care convine	3p 2p
4.	$x - \frac{20}{100} \cdot x = 144$ , unde $x$ este prețul produsului înainte de ieftinire $x = 180$ de lei	3p 2p
5.	$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (0-a)^2}$ , deci $\sqrt{a^2 + 9} = 5$ $a = -4$ sau $a = 4$	3p 2p
6.	$\sin 130^\circ = \sin(180^\circ - 130^\circ) = \sin 50^\circ$ $\sin^2 130^\circ + \cos^2 50^\circ = \sin^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ = 1$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-4) - 6 \cdot (-2) =$ $= -12 + 12 = 0$	3p 2p
b)	$A \cdot A + A = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$	3p 2p
c)	$X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ , unde $x, y, z$ și $t$ sunt numere reale și $X + I_2 = \begin{pmatrix} x+1 & y \\ z & t+1 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & y \\ z & t+1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow xt - yz = xt + x + t + 1 - yz \Leftrightarrow x + t = -1$ și, cum există o infinitate de numere reale $x$ și $t$ pentru care $x + t = -1$ , există o infinitate de matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det X = \det(X + I_2)$	2p 3p
2.a)	$1 \circ \sqrt{2} = -1 \cdot \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} =$ $= -\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 1$	3p 2p

Probă scrisă la matematică *M\_tehnologic*

Test 8

Barem de evaluare și de notare

Filierea tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

b)	$x \circ y = -xy + x + y - 1 + 1 =$ $= -x(y-1) + (y-1) + 1 = -(x-1)(y-1) + 1$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	2p 3p
c)	$-(3^x - 1)(5^x - 1) + 1 = 1 \Leftrightarrow 3^x - 1 = 0$ sau $5^x - 1 = 0$ $x = 0$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 4x^3 - 4x =$ $= 4x(x^2 - 1) = 4x(x-1)(x+1)$ , $x \in \mathbb{R}$	2p 3p
b)	$f(2) = -55$ , $f'(2) = 24$ Ecuția tangentei este $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$ , deci $y = 24x - 103$	2p 3p
c)	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(x)}{2x} =$ $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x(x-1)(x+1)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 3} 2(x-1)(x+1) = 16$	3p 2p
2.a)	$F'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} =$ $= \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1 - 1}{(x+1)^2} = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = f(x)$ , pentru orice $x \in (-1, +\infty)$ , deci funcția $F$ este o primitivă a funcției $f$	2p 3p
b)	$\int_0^1 f(x) dx = F(x) \Big _0^1 = F(1) - F(0) =$ $= \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$	3p 2p
c)	$F(x) > 0$ , pentru orice $x \in [1, a]$ și $\int_1^a \frac{f(x)}{F(x)} dx = \int_1^a \frac{F'(x)}{F(x)} dx = \ln(F(x)) \Big _1^a = \ln(F(a)) - \ln(F(1))$ $\ln(F(a)) - \ln \frac{1}{2} = \ln \frac{8}{3} \Leftrightarrow \ln(F(a)) = \ln \frac{8}{3} + \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln(F(a)) = \ln \frac{4}{3}$ , deci $\frac{a^2}{a+1} = \frac{4}{3}$ și, cum $a > 1$ , obținem $a = 2$	3p 2p

Probă scrisă la matematică *M\_tehnologic*

Test 8

Barem de evaluare și de notare

Filierea tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

**Examenul de bacalaureat național 2020**

**Proba E. c)**

**Matematică M\_tehnologic**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Test 9**

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{(a_1 + a_4) \cdot 4}{2} = \frac{(2+11) \cdot 4}{2} = 26$	<b>3p</b>
<b>2.</b>	$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x = 2x - 4 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0$ Coordonatele punctului de intersecție sunt $x = 2, y = 0$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>3.</b>	$\sqrt[3]{x+2} = 2 \Leftrightarrow x+2 = 8$ $x = 6$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>4.</b>	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt $4 \cdot 5 = 20$ de numere care au cifrele pare, deci sunt 20 de cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$	<b>2p</b> <b>2p</b> <b>1p</b>
<b>5.</b>	$B$ este mijlocul segmentului $AC$ , unde $C(a, b)$ este simetricul punctului $A$ față de punctul $B$ , deci $3 = \frac{-1+a}{2} \Rightarrow a = 7$ $1 = \frac{5+b}{2} \Rightarrow b = -3$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>6.</b>	$BC^2 = AB^2 + AC^2$ , deci $\triangle ABC$ este dreptunghic $\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}$	<b>2p</b> <b>3p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A + I_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 4$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, A \cdot A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ $A \cdot A \cdot A + A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot A \cdot A$	<b>2p</b> <b>3p</b>

Probă scrisă la matematică M\_tehnologic

Test 9

Barem de evaluare și de notare

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

<b>c)</b>	$B(x) = A + xI_3 = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1+x & 0 \\ 1 & 1 & 1+x \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B(x)) = x(1+x)^2$ , pentru orice număr real $x$ $B(x)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(B(x)) \neq 0 \Leftrightarrow x(1+x)^2 \neq 0$ , de unde obținem $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$2020 \cdot 0 = 2020 + a \cdot 0 + 1 = 2020 + 1 = 2021$ , pentru orice număr real $a$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$(x * y) * z = (x + ay + 1) * z = x + ay + 1 + az + 1 = x + ay + az + 2$ , pentru orice numere reale $x, y$ și $z$ $x * (y * z) = x * (y + az + 1) = x + a(y + az + 1) + 1 = x + ay + a^2z + a + 1$ , pentru orice numere reale $x, y$ și $z$ și, cum, legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă, obținem $a = 1$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$x * y = x - y + 1$ , deci $4^x - 2^x + 1 = 1$ $2^x(2^x - 1) = 0$ , de unde obținem $x = 0$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = \frac{2(x-1)(x-2) - (x-1)^2}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)(2x-4-x+1)}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}, x \in (2, +\infty)$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$f'(3) = 0, f(3) = 4$ Ecuația tangentei este $y - f(3) = f'(3)(x - 3)$ , deci $y = 4$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3}, x \in (2, +\infty)$ $f''(x) > 0$ , pentru orice $x \in (2, +\infty)$ , deci funcția $f'$ este crescătoare pe $(2, +\infty)$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_1^e \frac{\sqrt{x^2+1}}{f(x)} dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln x \Big _1^e = \ln e - \ln 1 = 1$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_1^2 f^2(x) dx = \int_1^2 x^2(x^2+1) dx = \left( \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \right) \Big _1^2 = \frac{32}{5} + \frac{8}{3} - \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{128}{15}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$\int_0^a f(x) dx - \int_0^{2020} f(x) dx = \int_0^{2020} f(x) dx + \int_{2020}^a f(x) dx - \int_0^{2020} f(x) dx = \int_{2020}^a f(x) dx$ , pentru orice $a \in [2020, +\infty)$ Pentru orice $x \in [0, +\infty), f(x) \geq 0$ , deci, pentru orice $a \in [2020, +\infty), \int_{2020}^a f(x) dx \geq 0$ , de unde obținem $\int_0^{2020} f(x) dx \leq \int_0^a f(x) dx$	<b>3p</b> <b>2p</b>

Probă scrisă la matematică M\_tehnologic

Test 9

Barem de evaluare și de notare

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

Examenul de bacalaureat național 2020  
Proba E. c)

Matematică *M\_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 10

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$2,5 : 0,5 - 5 \left( 6,5 - \frac{11}{2} \right) = 25 : 5 - 5(6,5 - 5,5) =$ $= 5 - 5 \cdot 1 = 0$	3p 2p
2.	$x_1 + x_2 = -m, x_1 x_2 = 1$ $-m + 2 \cdot 1 = 1$ , deci $m = 1$	2p 3p
3.	$\sqrt{x-2} = 3-1 \Rightarrow x-2 = 4$ $x = 6$ , care convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre, numerele divizibile cu 10 sunt: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 și 90, deci sunt 9 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$	2p 2p 1p
5.	$AB = 8, AC = 6, BC = 10$ $P_{ABC} = 6 + 8 + 10 = 24$	2p 3p
6.	Unghiul $A$ este ascuțit $\Rightarrow \cos A > 0$ și, cum $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ , obținem $\cos A = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} =$ $= \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A + I_2) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 =$ $= 8 - 3 = 5$	3p 2p
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 12 & 12 \end{pmatrix} =$ $= 4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 4A$	3p 2p
c)	$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , deci $AX = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ 3x+3z & 3y+3t \end{pmatrix}$ și $XA = \begin{pmatrix} x+3y & x+3y \\ z+3t & z+3t \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x+z & y+t \\ 3x+3z & 3y+3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y & x+3y \\ z+3t & z+3t \end{pmatrix} \Leftrightarrow z = 3y$ și $x + 2y = t \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x+2y \end{pmatrix}$ , unde $x$ și $y$ sunt numere reale, deci există o infinitate de matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A \cdot X = X \cdot A$	3p 2p

Probă scrisă la matematică *M\_tehnologic*

Test 10

Barem de evaluare și de notare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

2.a)	$1 * 2 = \frac{1 \cdot 2 + 1 + 2 - 1}{2} =$ $= \frac{4}{2} = 2$	3p 2p
b)	$\frac{x^2 + 2x - 1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1) \leq 0$ $x \in [-3, 1]$	3p 2p
c)	$(-1) * x = -1$ , unde $x$ este număr real $(-1) * 0 * 1 * \dots * 2020 = (-1) * (0 * 1 * \dots * 2020) = -1$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} =$ $= \frac{2(x^2 - 1)}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}, x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ $f'(x) \leq 0$ , pentru orice $x \in (0, 1] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0, 1]$ $f'(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1, +\infty)$	1p 2p 2p
c)	Pentru orice $x \in (0, +\infty)$ , $f(x) \geq f(1)$ și, cum $f(1) = 1$ , obținem $x^2 - 2 \ln x \geq 1$ $\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \ln \frac{2}{3} \geq 1$ , deci $2 \ln \frac{2}{3} \leq \frac{4}{9} - 1$ , de unde obținem $\ln \frac{2}{3} \leq -\frac{5}{18}$	2p 3p
2.a)	$\int_0^1 (f(x) + 2020x - 1) dx = \int_0^1 x^{2020} dx = \frac{x^{2021}}{2021} \Big _0^1 =$ $= \frac{1^{2021} - 0^{2021}}{2021} = \frac{1}{2021}$	3p 2p
b)	$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă oarecare a funcției $f$ , deci $F'(x) = f(x)$ , pentru orice număr real $x$ $F''(x) = f'(x) = 2020x^{2019} - 2020 = 2020(x^{2019} - 1) \geq 0$ , pentru orice $x \in [1, +\infty)$ , deci orice primitivă $F$ a funcției $f$ este convexă pe $[1, +\infty)$	2p 3p
c)	$\int_0^1 (f(-x) - f(x)) e^x dx = \int_0^1 4040x e^x dx = 4040 \int_0^1 x e^x dx = 4040 x e^x \Big _0^1 - 4040 \int_0^1 e^x dx =$ $= 4040e - 4040e^x \Big _0^1 = 4040e - 4040e + 4040 = 4040$	3p 2p

Probă scrisă la matematică *M\_tehnologic*

Test 10

Barem de evaluare și de notare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

Examenul de bacalaureat național 2020  
Proba E. c)

Matematică *M\_tehnologic*  
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 11

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{1}{2} : 0,5 - \frac{1}{4} : 0,25 = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} - \frac{1}{4} : \frac{1}{4} =$ $= 1 - 1 = 0$	3p 2p
2.	$f(1) = 0$ $f(-1) \cdot f(1) = 0$	3p 2p
3.	$3x - 2 = 25$ $x = 9$ , care convine	3p 2p
4.	$\frac{20}{100} \cdot 1000 = 200$ Prețul după scumpire este $1000 + 200 = 1200$ de lei	3p 2p
5.	$M(4,3)$ , unde $M$ este mijlocul segmentului $AB$ $OM = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = 5$	3p 2p
6.	$\triangle ABC$ este dreptunghic în $A$ și $B = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \triangle ABC$ este isoscel $AB = AC = 4$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 2 =$ $= -2 - 2 = -4$	3p 2p
b)	$A - 2B(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x & 2 \\ 2y & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2x & 0 \\ 1-2y & 0 \end{pmatrix}$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$ $\det(A - 2B(x, y)) = \begin{vmatrix} 1-2x & 0 \\ 1-2y & 0 \end{vmatrix} = 0$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	2p 3p
c)	$A \cdot B(x, y) = \begin{pmatrix} x+2y & -1 \\ x-2y & 3 \end{pmatrix}$ , $B(x, y) \cdot A = \begin{pmatrix} x+1 & 2x-2 \\ y-1 & 2y+2 \end{pmatrix}$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$ $\begin{pmatrix} x+2y & -1 \\ x-2y & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 & 2x-2 \\ y-1 & 2y+2 \end{pmatrix}$ , de unde obținem $x = \frac{1}{2}$ , $y = \frac{1}{2}$	2p 3p
2.a)	$2020 \circ (-2) = 2020 \cdot (-2) + 2(2020 + (-2)) + 2 =$ $= 2020 \cdot (-2) + 2 \cdot 2020 + 2 \cdot (-2) + 2 = -4 + 2 = -2$	3p 2p
b)	$x \circ y = xy + 2x + 2y + 4 - 2 =$ $= x(y+2) + 2(y+2) - 2 = (x+2)(y+2) - 2$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	3p 2p

e)	$\left(\frac{1}{x} + 2\right)(x+2) - 2 = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + 2\right)(x+2) = x+2 \Leftrightarrow (x+2)\left(\frac{1}{x} + 1\right) = 0$ $x = -2$ sau $x = -1$	3p 2p
----	--	----------

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 3x^2 + 2(x-1)(x-1)'$ $= 3x^2 + 2(x-1) = 3x^2 + 2x - 2$ , $x \in \mathbb{R}$	2p 3p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x f'(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(3x^2 + 2x - 2)}{x^3 + (x-1)^2} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + 2x^2 - 2x}{x^3 + x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = 3$	2p 3p
c)	Tangenta la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x = a$ , situat pe graficul funcției $f$ are panta egală cu $f'(a)$ , deci este paralelă cu dreapta $y = 3x + 1 \Leftrightarrow f'(a) = 3$ $3a^2 + 2a - 5 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{3}$ sau $a = 1$	2p 3p
2.a)	$\int_{-1}^1 (f(x) - x^3 - 2x - 2) dx = \int_{-1}^1 (x^5 + x^3 + 2x + 2 - x^3 - 2x - 2) dx = \int_{-1}^1 x^5 dx = \frac{x^6}{6} \Big _{-1}^1 =$ $= \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0$	3p 2p
b)	$\int_0^2 e^x (f(x) - x^5 - x^3 - 3x - 1) dx = \int_0^2 e^x (-x+1) dx = e^x (-x+1) \Big _0^2 - \int_0^2 (-1) e^x dx =$ $= -e^2 - 1 + e^2 - 1 = -2$	3p 2p
c)	$F$ este primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x)$ , $x \in \mathbb{R}$ $F''(x) = f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 2 \geq 0$ , pentru orice număr real $x$ , deci $F$ este convexă	2p 3p

Examenul de bacalaureat național 2020  
Proba E. c)

Matematică *M\_tehnologic*  
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 12

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}; 0,5\right) \cdot \frac{12}{13} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 1\right) \cdot \frac{12}{13} = \left(\frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12}\right) \cdot \frac{12}{13} = \frac{13}{12} \cdot \frac{12}{13} = 1$	3p
		2p
2.	$x_1 + x_2 = 7, x_1 x_2 = 10$ $2(x_1 + x_2) - x_1 x_2 = 2 \cdot 7 - 10 = 4$	2p
		3p
3.	$5x + 1 = 36$ $x = 7$ , care convine	3p
		2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Numerele de două cifre care sunt multipli de 11 sunt 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 și 99, deci sunt 9 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$	2p
		2p
		1p
5.	$AO = 6, BO = 8, AB = 10$ $h = \frac{AO \cdot BO}{AB} = \frac{6 \cdot 8}{10} = \frac{24}{5} = 4,8$	3p
		2p
6.	$\cos B = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AB}{5\sqrt{2}}$ $AB = 5$	3p
		2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot (-2) = 1 - 0 = 1$	3p
		2p
b)	$2A - A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$	3p
		2p
c)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 & y \\ z+1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-3 & y \\ -2x+z+5 & -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $x = 3, y = 0, z = 1$	2p
		3p
2.a)	$0 \circ 2 = 0 \cdot 2 + 0^2 + 2^2 - 1 = 3$ $1 \circ (0 \circ 2) = 1 \circ 3 = 1 \cdot 3 + 1^2 + 3^2 - 1 = 12$	3p
		2p

Probă scrisă la matematică *M\_tehnologic*

Barem de evaluare și de notare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

Test 12

b)	$x \circ (-x) = x \cdot (-x) + x^2 + (-x)^2 - 1 = -x^2 + x^2 + x^2 - 1 = x^2 - 1$ , pentru orice număr real $x$ $x^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$ , de unde obținem $x = -2$ sau $x = 2$	2p
		3p
c)	$mn + m^2 + n^2 - 1 = -mn \Leftrightarrow m^2 + n^2 + 2mn = 1 \Leftrightarrow (m+n)^2 = 1$ Cum $m$ și $n$ sunt numere naturale, obținem $(0,1)$ și $(1,0)$	3p
		2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2 + 1) - (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x \cdot (x^2 + 1 - x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}, x \in \mathbb{R}$	3p
		2p
b)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x-1)(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2 + 1} = \frac{2}{2} = 1$	3p
		2p
c)	$f''(x) = \frac{4(1 - 3x^2)}{(x^2 + 1)^3}, x \in \mathbb{R}$ $f''(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ , deci funcția $f$ este convexă pe $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$	2p
		3p
2.a)	$\int_{-1}^1 (f(x) - x^2 - 3x) dx = \int_{-1}^1 (x^3 + x^2 + 3x - x^2 - 3x) dx = \int_{-1}^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big _{-1}^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$	2p
		3p
b)	$\int_0^1 (f(x) - x^3 - x^2) e^x dx = \int_0^1 (x^3 + x^2 + 3x - x^3 - x^2) e^x dx = 3 \int_0^1 x e^x dx = 3(x-1)e^x \Big _0^1 = 3$	3p
		2p
c)	$F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + c, c \in \mathbb{R}$ și, cum $F(0) = 1 \Rightarrow c = 1$ , deci $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 1$ $\int_0^1 \frac{f(x)}{F^2(x)} dx = \int_0^1 \frac{F'(x)}{F^2(x)} dx = -\frac{1}{F(x)} \Big _0^1 = -\frac{1}{F(1)} + \frac{1}{F(0)} = -\frac{12}{37} + 1 = \frac{25}{37}$	3p
		2p

Probă scrisă la matematică *M\_tehnologic*

Barem de evaluare și de notare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

Test 12

Examenul de bacalaureat național 2020  
Proba E. c)

Matematică *M\_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 13

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\sqrt{16} - \sqrt{32} + \sqrt{18} + \sqrt{2} - 2^2 = 4 - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + \sqrt{2} - 4 =$ $= (4 - 4) + (-4 + 3 + 1)\sqrt{2} = 0$	3p 2p
2.	$f(1) = 1 + a^2$ , deci $1 + a^2 = 2$ $a^2 = 1$ , deci $a = -1$ sau $a = 1$	2p 3p
3.	$3x + 1 = 4$ $x = 1$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de o cifră are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de o cifră sunt 5 numere impare, deci sunt 5 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$	2p 2p 1p
5.	$A$ este mijlocul segmentului $BC$ , unde $C$ este simetricul lui $B$ față de $A$ , deci $3 = \frac{3 + x_C}{2}$ și $1 = \frac{7 + y_C}{2}$ $x_C = 3$ , $y_C = -5$	3p 2p
6.	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{1}{2}$ și, cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , obținem $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = (\sin x - \cos x)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 =$ $= 4 - 9 = -5$	2p 3p
b)	$A \cdot M(x) = A \cdot (B + xI_2) = A \cdot B + xA$ , $M(x) \cdot A = (B + xI_2) \cdot A = B \cdot A + xA$ , pentru orice număr real $x$ Cum $A \cdot B = B \cdot A$ , obținem $A \cdot M(x) = M(x) \cdot A$ , pentru orice număr real $x$	3p 2p
c)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{pmatrix}$ , $A + M(x) = \begin{pmatrix} 2+x & 4 \\ 4 & 2+x \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot A - 3(A + M(x)) = \begin{pmatrix} 7-3x & 0 \\ 0 & 7-3x \end{pmatrix}$ , pentru orice număr real $x$	3p

	$\begin{pmatrix} 7-3x & 0 \\ 0 & 7-3x \end{pmatrix} = I_2 \Leftrightarrow 7-3x = 1$ , de unde obținem $x = 2$	2p
2.a)	$2020 * (-3) = \frac{1}{3} \cdot 2020 \cdot (-3) + 2020 + (-3) =$ $= -2020 + 2020 - 3 = -3$	3p 2p
b)	$6 * x = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot x + 6 + x = 3x + 6$ , $(6 * x) * 6 = (3x + 6) * 6 = \frac{1}{3}(3x + 6) \cdot 6 + 3x + 6 + 6 = 9x + 24$ $9x + 24 = 6 \Leftrightarrow x = -2$	3p 2p
c)	$x * \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \cdot x \cdot \frac{1}{x} + x + \frac{1}{x} = \frac{1}{3} + x + \frac{1}{x} = \frac{3x^2 + x + 3}{3x}$ , pentru orice număr real nenul $x$ $\frac{3x^2 + x + 3}{3x} = -3 \Leftrightarrow 3x^2 + 10x + 3 = 0$ , de unde obținem $x = -3$ sau $x = -\frac{1}{3}$ , care convin	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = (x^3 - 3x + 3)' = 3x^2 - 3 =$ $= 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$ , $x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x^3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 3}{x + 1} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = -3$	2p 3p
c)	$f(0) = 3$ , $f'(0) = -3$ Ecuția tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ , adică $y = -3x + 3$	2p 3p
2.a)	$\int_{-1}^1 (f(x) - x - e^x) dx = \int_{-1}^1 (x^4 + x + e^x - x - e^x) dx = \int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big _{-1}^1 =$ $= \frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}$	3p 2p
b)	$\int_1^e (f(x) - x^4 - e^x) \ln x dx = \int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x \Big _1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx =$ $= \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big _1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$	3p 2p
c)	$\int_0^a (x^4 + x + e^x) dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2} + e^x\right) \Big _0^a = \frac{a^5}{5} + \frac{a^2}{2} + e^a - 1 = \frac{2a^5 + 5a^2 - 10}{10} + e^a$ $\frac{2a^5 + 5a^2 - 10}{10} + e^a = \frac{5a^2 + 54}{10} + e^a \Leftrightarrow 2a^5 = 64$ , deci $a = 2$	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2020  
Proba E. c)

Matematică *M\_tehnologic*  
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 14

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\left(2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{15}{16} + \sqrt[3]{-8} = \frac{30+5-3}{15} \cdot \frac{15}{16} + (-2) =$ $= \frac{32}{15} \cdot \frac{15}{16} - 2 = 2 - 2 = 0$	3p 2p
2.	$f(4) = 0 \Rightarrow -4 + a = 0$ $a = 4$	3p 2p
3.	$2x + 1 = 25 \Rightarrow 2x = 24$ $x = 12$ , care convine	3p 2p
4.	Mulțimea $A$ are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile Numerele din mulțimea $A$ care sunt multipli de 6 sunt 30, 60 și 90, deci sunt 3 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$	2p 2p 1p
5.	$M(5,5)$ $OM = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$	3p 2p
6.	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$ și, cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , obținem $\sin x = \frac{12}{13}$ $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{12}{13} \cdot \frac{13}{5} = \frac{12}{5}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) =$ $= 0 + 1 = 1$	3p 2p
b)	$B \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B \cdot B + A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$	3p 2p
c)	$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot B + B \cdot A - (A + B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log_2 x & 0 \\ 0 & \log_3 y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_3 y = 1 \end{cases}$ , de unde obținem $x = 2$ și $y = 3$ , care convin	2p 3p
2.a)	$2020 \cdot 5 = 2020 + \frac{5}{5} + 1 =$	3p

Probă scrisă la matematică *M\_tehnologic*

Test 14

Barem de evaluare și de notare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

	$= 2020 + 1 + 1 = 2022$	2p
b)	$x * x = x + \frac{x}{5} + 1 = \frac{6x}{5} + 1$ , $(x * x) * x = \left(\frac{6x}{5} + 1\right) * x = \frac{6x}{5} + 1 + \frac{x}{5} + 1 = \frac{7x}{5} + 2$ $\frac{7x}{5} + 2 = \frac{24}{5} \Leftrightarrow 7x + 10 = 24$ , de unde obținem $x = 2$	2p 3p
c)	$5^x + \frac{5^{x+1}}{5} + 1 = 11 \Leftrightarrow 5^x + 5^x = 10 \Leftrightarrow 2 \cdot 5^x = 10$ $5^x = 5$ , de unde obținem $x = 1$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = -3x^2 + 3 =$ $= 3(1 - x^2) = 3(1 - x)(1 + x)$ , $x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 7}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} =$ $= f'(2) = -9$	3p 2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ sau $x = 1$ $x \in [-1, 1] \Rightarrow f'(x) \geq 0$ , deci $f$ este crescătoare pe $[-1, 1]$ , $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f'(x) \leq 0$ , deci $f$ este descrescătoare pe $[1, +\infty)$ și, cum $f(1) = 11$ , obținem $f(x) \leq 11$ , pentru orice $x \in [-1, +\infty)$	2p 3p
2.a)	$\int_{-1}^1 f(x) \cdot (x^2 + 1) dx = \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 + 1} \cdot (x^2 + 1) dx = \int_{-1}^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _{-1}^1 =$ $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$	3p 2p
b)	$\int_0^1 (x^2 + 1) e^x f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 1) e^x \cdot \frac{x}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 x e^x dx = (x - 1) e^x \Big _0^1 =$ $= 0 - (-1) e^0 = 1$	3p 2p
c)	$\int_0^a (f(x) - f(-x)) dx = \int_0^a \left(\frac{x}{x^2 + 1} - \frac{-x}{x^2 + 1}\right) dx = \int_0^a \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \ln(x^2 + 1) \Big _0^a = \ln(a^2 + 1)$ $\ln(a^2 + 1) = \ln(2a) \Rightarrow a^2 + 1 = 2a$ , de unde obținem $a^2 - 2a + 1 = 0$ , deci $a = 1$ , care convine	2p 3p

Probă scrisă la matematică *M\_tehnologic*

Test 14

Barem de evaluare și de notare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

Examenul de bacalaureat național 2020  
Proba E. c)

Matematică *M\_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 15

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5}\right) : \frac{17}{60} = \left(\frac{60}{60} - \frac{40}{60} + \frac{45}{60} - \frac{48}{60}\right) : \frac{17}{60} =$ $= \frac{17}{60} : \frac{17}{60} = 1$	3p 2p
2.	$f(1) = 0$ $f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot f(4) \cdot f(5) = 0$	3p 2p
3.	$4x - 3 = 25 \Rightarrow 4x = 28$ $x = 7$ , care convine	3p 2p
4.	Mulțimea $A$ are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile Numerele $x$ din mulțimea $A$ care verifică inegalitatea $x^2 - 2x \leq 0 \Leftrightarrow x(x - 2) \leq 0$ sunt 1 și 2, deci sunt 2 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	2p 2p 1p
5.	$AO = 6$ $BO = 6 \Rightarrow \triangle AOB$ este isoscel	2p 3p
6.	$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} =$ $= 24$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$B(1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B(1)) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) - 0 \cdot 1 =$ $= 1 - 0 = 1$	3p 2p
b)	$A \cdot A - 2A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$	3p 2p
c)	$A \cdot B(x) = \begin{pmatrix} 2x-3 & x-2 \\ x-2 & x-1 \end{pmatrix}$ , pentru orice număr real $x$ $\begin{pmatrix} 2x-3 & x-2 \\ x-2 & x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , de unde obținem $x = 2$ , care convine	3p 2p
2.a)	$(-1) * 2020 = (-1) \cdot 2020 + (-1) + 2020 - 2 =$ $= -2020 - 1 + 2020 - 2 = -3$	3p 2p

Probă scrisă la matematică *M\_tehnologic*

Test 15

Barem de evaluare și de notare

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

b)	$x \cdot (2x) + x + 2x - 2 = 3 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 5 = 0$ $x = -\frac{5}{2}$ sau $x = 1$	3p 2p
c)	$m * n = mn + m + n - 2 = m(n+1) + (n+1) - 3 = (m+1)(n+1) - 3$ , pentru orice numere naturale $m$ și $n$ $(m+1)(n+1) - 3 = -1 \Leftrightarrow (m+1)(n+1) = 2$ și, cum $m$ și $n$ sunt numerele naturale, obținem $(0,1)$ și $(1,0)$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 4x - 5 + \frac{1}{x} =$ $= \frac{4x^2 - 5x + 1}{x} = \frac{(x-1)(4x-1)}{x}$ , $x \in (0, +\infty)$	2p 3p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{2x^2 - 5x + \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(2x^2 - 5x + \ln x)'}$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{4x^2 - 5x + 1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x^2 - 5x + 1} = 0$	3p 2p
c)	$f(1) = -3$ , $f'(1) = 0$ Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ , adică $y = -3$	2p 3p
2.a)	$\int_{-1}^1 (f(x) - x^2 - x - 1) dx = \int_{-1}^1 (x^3 + x^2 + x + 1 - x^2 - x - 1) dx = \int_{-1}^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big _{-1}^1 =$ $= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$	3p 2p
b)	$F'(x) = \left( \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right)' = \frac{4x^3}{4} + \frac{3x^2}{3} + \frac{2x}{2} + 1 =$ $= x^3 + x^2 + x + 1 = f(x)$ , $x \in \mathbb{R}$ , deci funcția $F$ este o primitivă a funcției $f$	3p 2p
c)	$\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2 + 1} \cdot e^x dx = \int_1^2 \frac{(x^2 + 1)(x + 1)}{x^2 + 1} \cdot e^x dx = \int_1^2 (x + 1)e^x dx = xe^x \Big _1^2 = 2e^2 - e$ $2e^2 - e = (ae)^2 - e$ , de unde obținem $a^2 = 2$ , deci $a = -\sqrt{2}$ sau $a = \sqrt{2}$	3p 2p

Probă scrisă la matematică *M\_tehnologic*

Test 15

Barem de evaluare și de notare

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

Examenul de bacalaureat național 2020  
Proba E. c)

Matematică *M\_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 16

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\log_5 5 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right); \frac{5}{12} = 1 - \frac{6-4+3}{12}; \frac{5}{12} = 1 - \frac{5}{12}; \frac{5}{12} = 1 - 1 = 0$	3p 2p
2.	$f(n) = 7 \Rightarrow n^2 + n + 1 = 7 \Rightarrow n^2 + n - 6 = 0$ Cum $n$ este număr natural, obținem $n = 2$	3p 2p
3.	$x^2 - 9 = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow 6x = 18$ $x = 3$ , care convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Numerele de două cifre de forma $\overline{aa}$ sunt 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 și 99, deci sunt 9 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$	2p 2p 1p
5.	$AB = 4$ , $d(C, AB) = 4$ $A_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot d(C, AB)}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$	3p 2p
6.	$\Delta ABC$ este dreptunghic în $A$ și $AC = \frac{BC}{2}$ $m(\sphericalangle B) = 30^\circ$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) = 2 - (-2) = 4$	3p 2p
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ , $3A = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ , $4I_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $A \cdot A + 3A + 4I_2 = \begin{pmatrix} 2-6+4 & -6+6+0 \\ 3-3+0 & -1-3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$	3p 2p
c)	$A \cdot A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$ , $xA + yI_2 = \begin{pmatrix} -2x+y & 2x \\ -x & -x+y \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+y & 2x \\ -x & -x+y \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 5, y = 12$	3p 2p

Probă scrisă la matematică *M\_tehnologic*

Barem de evaluare și de notare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

Test 16

2.a)	$2020 * 1 = 2 \cdot 2020 \cdot 1 - 2 \cdot 2020 - 2 \cdot 1 + 3 = -2 + 3 = 1$	3p 2p
b)	$x * y = 2xy - 2x - 2y + 2 + 1 = 2(xy - x - y + 1) + 1 = 2(x(y-1) - (y-1)) + 1 = 2(x-1)(y-1) + 1$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	3p 2p
c)	$x * x = 2(x-1)^2 + 1$ , $(x * x) * x = 4(x-1)^3 + 1$ , pentru orice număr real $x$ $4(x-1)^3 + 1 = x \Leftrightarrow (x-1)(4(x-1)^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ sau $x = 1$ sau $x = \frac{3}{2}$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 9x^2 - 9 = 9(x^2 - 1) = 9(x-1)(x+1)$ , $x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$f(1) = -1$ , $f'(1) = 0$ Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y = -1$	2p 3p
c)	$f'(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in [1, +\infty)$ , deci $f$ este crescătoare pe intervalul $[1, +\infty)$ $f(2019) \leq f(2020)$ și $f(2021) \leq f(2022)$ , deci $f(2019) + f(2021) \leq f(2020) + f(2022)$	3p 2p
2.a)	$\int_0^3 (f(x) + 4) dx = \int_0^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big _0^3 = \frac{27}{3} = 9$	2p 3p
b)	$\int_0^1 \frac{1}{f(x)+5} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \arctg x \Big _0^1 = \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4}$	3p 2p
c)	$\int_{\frac{1}{a}}^a f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_{\frac{1}{a}}^a \left(\frac{1}{x^2} - 4\right) dx = \left(-\frac{1}{x} - 4x\right) \Big _{\frac{1}{a}}^a = \frac{3}{a} - 3a$ $\frac{3}{a} - 3a = -8 \Leftrightarrow 3a^2 - 8a - 3 = 0$ și, cum $a > 0$ , obținem $a = 3$	3p 2p

Probă scrisă la matematică *M\_tehnologic*

Barem de evaluare și de notare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

Test 16

**Examenul de bacalaureat național 2020**  
**Proba E. c)**

**Matematică M<sub>tehnologic</sub>**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Test 17

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	$m_g = \sqrt{xy} = \sqrt{25 \cdot 144} =$ $= 5 \cdot 12 = 60$	3p 2p
2.	$f(1) = 1 + m$ $1 + m = 0 \Leftrightarrow m = -1$	2p 3p
3.	$x + 4 = 25$ $x = 21$ , care convine	3p 2p
4.	Mulțimea $A$ are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile În mulțimea $A$ sunt 6 numere care <b>nu</b> sunt multipli de 3, deci sunt 6 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$	2p 2p 1p
5.	$M(3,4)$ , unde $M$ este mijlocul segmentului $AB$ $OM = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$	2p 3p
6.	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ Cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , obținem $\sin x = \frac{1}{2}$	3p 2p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 =$ $= 1 - 6 = -5$	3p 2p
b)	$M(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ , $A + M(-1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A + M(-1)) = -16$ $\det B = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -16$ , deci $\det(A + M(-1)) = \det B$	3p 2p
c)	$M(x) \cdot A = \begin{pmatrix} x+2 & 3x+1 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ , $A \cdot M(x) = \begin{pmatrix} x+6 & 10 \\ 2x+2 & 5 \end{pmatrix}$ , $M(x) \cdot A - A \cdot M(x) = \begin{pmatrix} -4 & 3x-9 \\ 6-2x & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -4 & 3x-9 \\ 6-2x & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 3$	3p 2p
2.a)	$90 * 1 = 90 + 1 - 90 =$ $= 0 + 1 = 1$	3p 2p

Probă scrisă la matematică M<sub>tehnologic</sub>

Barem de evaluare și de notare

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

Test 17

b)	$(x * y) * z = (x + y - 90) * z = x + y - 90 + z - 90 = x + y + z - 180$ , pentru orice numere reale $x, y$ și $z$ $x * (y * z) = x * (y + z - 90) = x + y + z - 90 - 90 = x + y + z - 180 = (x * y) * z$ , pentru orice numere reale $x, y$ și $z$	2p 3p
c)	$(x^2) * (2x + 1) = x^2 + 2x + 1 - 90 = x^2 + 2x - 89$ $x^2 + 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = -5$ sau $x = 3$	2p 3p

**SUBIECTUL al III-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 12x^2 - 12 =$ $= 12(x^2 - 1) = 12(x-1)(x+1)$ , $x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - 4x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-12x + 11}{x} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-12 + \frac{11}{x}\right) = -12$	2p 3p
c)	$f'(x) \leq 0$ , pentru orice $x \in [-1, 1]$ , deci $f$ este descrescătoare pe $[-1, 1]$ Cum $f(-1) = 19$ , $f(1) = 3$ și $f(1) \leq f(x) \leq f(-1)$ , obținem $3 \leq f(x) \leq 19$ , pentru orice $x \in [-1, 1]$	2p 3p
2.a)	$\int_2^4 \left(f(x) - \frac{1}{x}\right) dx = \int_2^4 5x dx = \frac{5x^2}{2} \Big _2^4 =$ $= \frac{5}{2} \cdot (16 - 4) = 30$	3p 2p
b)	$F'(x) = \left(\frac{5x^2 + 2020}{2} + \ln x\right)' =$ $= \frac{10x}{2} + \frac{1}{x} = 5x + \frac{1}{x} = f(x)$ , pentru orice $x \in (0, +\infty)$ , deci $F$ este o primitivă a funcției $f$	2p 3p
c)	$\int_1^e (f(x) - 5x) \ln x dx = \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \int_1^e (\ln x)' \ln x dx = \frac{\ln^2 x}{2} \Big _1^e =$ $= \frac{\ln^2 e}{2} - \frac{\ln^2 1}{2} = \frac{1}{2}$	3p 2p

Probă scrisă la matematică M<sub>tehnologic</sub>

Barem de evaluare și de notare

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

Test 17

Examenul de bacalaureat național 2020  
Proba E. c)

Matematică *M\_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 18

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\frac{2}{\sqrt{3}-1} - (\sqrt{3}+1) = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} - (\sqrt{3}+1) = \sqrt{3}+1 - \sqrt{3}-1 = 0$	3p 2p
2.	$f(0) = 3$ Coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției $f$ cu axa $Oy$ sunt $x = 0$ și $y = 3$	3p 2p
3.	$2x + 1 = 4 - x \Leftrightarrow 3x = 3$ $x = 1$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 45 de numere impare, deci sunt 45 de cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}$	2p 2p 1p
5.	$AB = 2$ $A$ este mijlocul segmentului $BC$ , deci $BC = 2AB = 4$	2p 3p
6.	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$ Cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , obținem $\sin x = \frac{4}{5}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0$	2p 3p
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ , $xA = \begin{pmatrix} 2x & x \\ 2x & x \end{pmatrix}$ , pentru orice număr real $x$ $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & x \\ 2x & x \end{pmatrix}$ , de unde obținem $x = 3$	3p 2p
c)	$\det(A + I_2) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$ , $\det(A - I_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$ , $\det(aI_2) = a^2$ , pentru orice număr real $a$ $a^2 = 2 \Leftrightarrow a = -\sqrt{2}$ sau $a = \sqrt{2}$	3p 2p
2.a)	$(-1) \circ 2020 = (-1) \cdot 2020 + (-1) + 2020 - 5 = -1 - 5 = -6$	3p 2p

Probă scrisă la matematică *M\_tehnologic*

Barem de evaluare și de notare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

b)	$x \circ x = x^2 + 2x - 5$ , pentru orice număr real $x$ $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ sau $x = 1$	2p 3p
c)	$m \circ (-2) + m + (-2) - 5 = 1 \cdot (-m) + 1 + (-m) - 5 \Leftrightarrow m = 3$ $m \circ (-m) = 3 \circ (-3) = 3 \cdot (-3) + 3 + (-3) - 5 = -14$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 - 1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2}$ , $x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2} = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ , deci dreapta de ecuație $y = x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției $f$	2p 3p
c)	$f''(x) = -\frac{2}{x^3}$ , $x \in (0, +\infty)$ $f''(x) < 0$ , pentru orice $x \in (0, +\infty)$ , deci funcția $f$ este concavă	2p 3p
2.a)	$\int_0^1 (f(x) - 2) dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big _0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$	3p 2p
b)	$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x + c$ , unde $c \in \mathbb{R}$ $F(2) = 7 \Rightarrow c = -1$ , deci $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x - 1$	2p 3p
c)	$\int_0^1 e^x (f(x) - x^3 + x^2) dx = \int_0^1 e^x (x^2 + 2) dx = e^x (x^2 + 2) \Big _0^1 - \int_0^1 2xe^x dx = 3e - 2 - 2 \left( xe^x \Big _0^1 - \int_0^1 e^x dx \right) = 3e - 4$	3p 2p

Probă scrisă la matematică *M\_tehnologic*

Barem de evaluare și de notare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

Examenul de bacalaureat național 2020  
Proba E. c)

Matematică *M\_tehnologic*  
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 19

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right) : \frac{14}{12} = \frac{6-8+9}{12} : \frac{14}{12} = \frac{7}{12} \cdot \frac{12}{14} = \frac{1}{2}$	3p 2p
2.	$f(1) = 0 \Rightarrow 1 + a + 1 = 0$ $a = -2$	3p 2p
3.	$3x - 4 = x + 20 \Rightarrow 2x = 24$ $x = 12$ , care convine	3p 2p
4.	Mulțimea $M$ are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile În mulțimea $M$ sunt 5 numere pare, deci sunt 5 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$	2p 2p 1p
5.	Înălțimea din $C$ a triunghiului $ABC$ este distanța de la punctul $C$ la dreapta $AB$ $d(C, AB) = 4$	3p 2p
6.	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$ Cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , obținem $\sin x = \frac{12}{13}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$	3p 2p
b)	$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$ $x \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5x & 5x \\ 5x & 5x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , de unde obținem $x = \frac{1}{5}$	3p 2p
c)	$A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \end{pmatrix}$ , $B \cdot A = \begin{pmatrix} 13 & 20 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ , deci $A \cdot B - B \cdot A - C = \begin{pmatrix} -6 & -16 \\ 14 & 4 \end{pmatrix}$ $2X = \begin{pmatrix} -6 & -16 \\ 14 & 4 \end{pmatrix}$ , deci $X = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$	3p 2p
2.a)	$2020 \circ (-4) = 2020 \cdot (-4) + 4 \cdot 2020 + 4 \cdot (-4) + 12 = -16 + 12 = -4$	3p 2p

Probă scrisă la matematică *M\_tehnologic*

Test 19

Barem de evaluare și de notare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

b)	$x \circ y = xy + 4x + 4y + 16 - 4 = x(y + 4) + 4(y + 4) - 4 = (x + 4)(y + 4) - 4$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	2p 3p
c)	$x \circ x = (x + 4)^2 - 4$ , pentru orice număr real $x$ $(x + 4)^2 - 4 = x \Leftrightarrow (x + 4)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = -4$ sau $x = -3$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = (4x^3)' + (6x^2)' + 5' = 12x^2 + 12x = 12x(x + 1)$ , $x \in \mathbb{R}$	2p 3p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x) - 4x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^2 + 12x}{6x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x^2 \left(6 + \frac{5}{x^2}\right)} = \frac{12}{6} = 2$	3p 2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ sau $x = 0$ $x \in (-\infty, -1] \Rightarrow f'(x) \geq 0$ , deci $f$ este crescătoare pe $(-\infty, -1]$ , $x \in [-1, 0] \Rightarrow f'(x) \leq 0$ , deci $f$ este descrescătoare pe $[-1, 0]$ , $x \in [0, +\infty) \Rightarrow f'(x) \geq 0$ , deci $f$ este crescătoare pe $[0, +\infty)$	2p 3p
2.a)	$\int_0^2 (f(x) - 4x^2) dx = \int_0^2 3x^3 dx = \frac{3x^4}{4} \Big _0^2 = \frac{3}{4} \cdot 2^4 = 12$	3p 2p
b)	$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $F(x) = \frac{3x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + c$ , unde $c \in \mathbb{R}$ $F(0) = 2020 \Rightarrow c = 2020$ , deci $F(x) = \frac{3x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + 2020$	2p 3p
c)	$\int_1^m \frac{f(x)}{x^2} dx = \int_1^m (3x + 4) dx = \left(\frac{3x^2}{2} + 4x\right) \Big _1^m = \frac{3m^2}{2} + 4m - \frac{11}{2}$ $\frac{3m^2}{2} + 4m - \frac{11}{2} = \frac{17}{2} \Rightarrow 3m^2 + 8m - 28 = 0$ și, cum $m > 1$ , obținem $m = 2$	3p 2p

Probă scrisă la matematică *M\_tehnologic*

Test 19

Barem de evaluare și de notare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

Examenul de bacalaureat național 2020  
Proba E. c)  
Matematică *M\_tehnologic*  
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 20

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\left(2 - \frac{1}{2}\right)\left(3 - \frac{1}{3}\right)\left(4 - \frac{1}{4}\right) : 15 = \frac{4-1}{2} \cdot \frac{9-1}{3} \cdot \frac{16-1}{4} : 15 =$ $= 15 : 15 = 1$	3p 2p
2.	$f(x) - f(-x) = x^2 + 5 - ((-x)^2 + 5) =$ $= x^2 + 5 - x^2 - 5 = 0$ , pentru orice număr real $x$	3p 2p
3.	$4x - 3 = 2x + 1 \Rightarrow 2x = 4$ $x = 2$ , care convine	3p 2p
4.	Mulțimea $A$ are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile Soluțiile ecuației $x^2 - 3x + 2 = 0$ sunt 1 și 2, care aparțin mulțimii $A$ , deci sunt 2 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	2p 2p 1p
5.	$m_{AB} = \frac{0-3}{3-0} = -1$ Ecuația dreptei care trece prin $O(0,0)$ și este paralelă cu dreapta $AB$ este $y = -x$	2p 3p
6.	$\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} =$ $= 12$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$B(0) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B(0)) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - (-2) \cdot 5 =$ $= -9 + 10 = 1$	3p 2p
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $A \cdot A + I_2 = \begin{pmatrix} -1+1 & 0 \\ 0 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$	3p 2p
c)	$B(x) = A - xI_2 = \begin{pmatrix} 3-x & -2 \\ 5 & -3-x \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B(x)) = \begin{vmatrix} 3-x & -2 \\ 5 & -3-x \end{vmatrix} = -9 + x^2 + 10 =$ $= x^2 + 1 \geq 1$ , pentru orice număr real $x$	3p 2p
2.a)	$2020 * (-1) = 2020 \cdot (-1) + 2020 + (-1) + 4 =$ $= -1 + 4 = 3$	3p 2p
b)	$x * y = xy + x + y + 1 + 3 =$ $= x(y+1) + (y+1) + 3 = (x+1)(y+1) + 3$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	3p 2p

Probă scrisă la matematică *M\_tehnologic*

Test 20

Barem de evaluare și de notare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

c)	$(m+1)(n+1) + 3 = 2$ $(m+1)(n+1) = -1$ și, cum $m$ și $n$ sunt numere întregi, obținem $(-2, 0)$ și $(0, -2)$	2p 3p
----	--	----------

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 8x^3 - 8x =$ $= 8x(x^2 - 1) = 8x(x-1)(x+1)$ , $x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$f(1) = -5$ , $f'(1) = 0$ Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ , adică $y = -5$	2p 3p
c)	$f'(-1) = f'(0) = f'(1) = 0$ , $x \in [-1, 0] \Rightarrow f'(x) \geq 0$ , deci $f$ este crescătoare pe $[-1, 0]$ și $x \in [0, 1] \Rightarrow f'(x) \leq 0$ , deci $f$ este descrescătoare pe $[0, 1]$ Cum $f(-1) = f(1) = -5$ și $f(0) = -3 \Rightarrow -5 \leq f(x) \leq -3$ , pentru orice $x \in [-1, 1]$	3p 2p
2.a)	$\int_1^4 (f(x) + \sqrt{x}) dx = \int_1^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big _1^4 =$ $= \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = 21$	3p 2p
b)	$F'(x) = \left( \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + 2020 \right)' = \frac{3x^2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} =$ $= x^2 - \sqrt{x} = f(x)$ , pentru orice $x \in (0, +\infty)$ , deci $F$ este o primitivă a funcției $f$	3p 2p
c)	$\int_1^2 (f(x) + \sqrt{x}) e^x dx = \int_1^2 x^2 e^x dx = x^2 e^x \Big _1^2 - \int_1^2 2xe^x dx = 4e^2 - e - 2 \left( xe^x \Big _1^2 - \int_1^2 e^x dx \right) =$ $= 4e^2 - e - 2(2e^2 - e) + 2e^x \Big _1^2 = 2e^2 - e = e(2e - 1)$	3p 2p

Probă scrisă la matematică *M\_tehnologic*

Test 20

Barem de evaluare și de notare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale